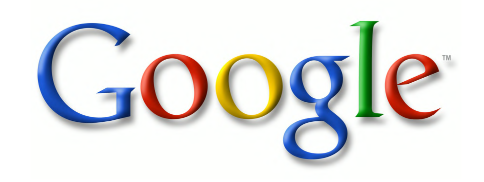
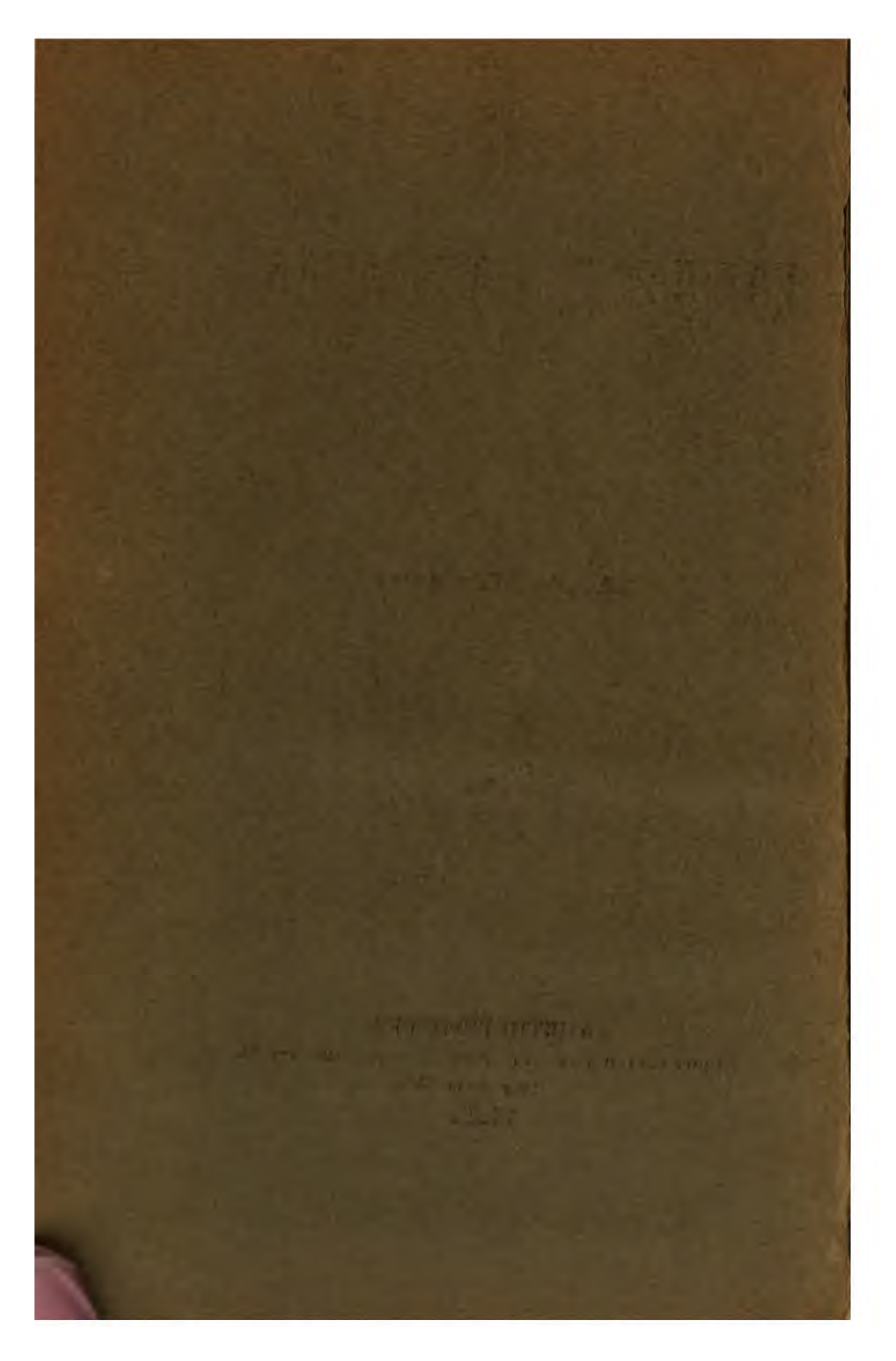




ИСЧИСЛЕНІЕ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

А. А. Марковъ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1900.



ИСЧИСЛЕНІЕ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

А. А. Марковъ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1900.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета С.-Петербургскаго Университета печатать разрѣшается.

18 октября 1899 года. Деканъ *А. Совѣтовъ*.

ГЛАВА I.

Основныя понятія и теоремы.

§ 1. Понятіе о вѣроятности связано съ тѣми вопросами, на которые мы можемъ отвѣчать только такъ: должно быть

либо A, либо B, либо C, ..., либо F, либо G.

Для однообразія и краткости условимся называть

$$A, B, C, \ldots, F, G,$$

появляющіеся въ отвѣтѣ на какой нибудь вопросъ, *событіями* или *случаями* независимо отъ содержанія вопроса. Совокупность же условій, при которыхъ вопросъ получаетъ опредѣленное рѣшеніе, будемъ называть *испытаніемъ*.

Если бы эта совокупность была извѣстна, то было бы извѣстно, какое именно изъ событій

$$A, B, C, \ldots, F, G$$

имѣетъ мѣсто.

Но вмѣсто нея извѣстны только нѣкоторыя условія испытанія.

Замѣтимъ, что извѣстныя условія часто можно разсматривать какъ постоянныя для многихъ испытаній, а неизвѣстныя какъ перемѣнныя, отличающія испытанія другъ отъ друга.

Тогда наши сужденія, основанныя только на извѣстныхъ условіяхъ, будутъ одинаково относиться къ каждому изъ этихъ испытаній, которыя могутъ сопровождаться совершенно различными результатами.

Событія

$$A, B, C, \ldots, F, G$$

мы называемъ *единственно возможными*, если одно изъ нихъ навѣрно должно быть.

Соблюденіе этого условія, конечно, необходимо для того, чтобы нашъ отвѣтъ, состоящій въ перечисленіи событій, можно было признать правильнымъ.

Мы будемъ называть событія

$$A, B, C, \ldots, F, G$$

несовмѣстными, если каждое изъ нихъ исключаетъ остальныя, такъ что невозможно одновременное существованіе какихъ бы то ни было двухъ изъ этихъ событій.

Эти термины не возбуждаютъ никакихъ сомнѣній, хотя мы не имѣемъ вѣрныхъ способовъ для рѣшенія вопроса о совмѣстности или несовмѣстности событій во всѣхъ случаяхъ.

Для установленія понятія о вѣроятности, какъ о числѣ, необходимъ еще одинъ терминъ, который не возбуждаетъ сомнѣнія только въ чисто теоретическихъ вопросахъ.

Два событія мы называемъ *равновозможными*, если нѣтъ никакихъ основаній ожидать одного изъ нихъ предпочтительно передъ другимъ. Нѣсколько событій мы называемъ равновозможными, если каждыя два изъ нихъ равновозможны.

Въ извѣстныхъ теоретическихъ вопросахъ равновозможность разсматриваемыхъ событій представляется нашему уму вполнѣ ясно; въ другихъ мы условливаемся, какія именно событія считаемъ равновозможными.

Въ практическихъ же вопросахъ мы можемъ быть вынуждены считать равновозможными и такія событія, равновозможность которыхъ весьма сомнительна.

Положимъ теперь, что событія

$$A,\ B,\ C, \ldots, \ F,\ G$$

единственно возможны, несовмѣстны и равновозможны. Тогда вѣроятностью каждаго изъ этихъ событій называется дробь, числитель которой равенъ единицѣ, а знаменатель числу ихъ.

Отъ этого простѣйшаго случая перейдемъ къ болѣе сложному.

Положимъ, что единственно возможныя и несовмѣстныя событія

$$A,\ B,\ C, \ldots, \ F,\ G$$

не равновозможны, но могутъ быть разбиты на равновозможныя, представляющія частные виды ихъ.

Пусть

$a_1,\ a_2, \ldots, \ a_\alpha$ частные виды событія A,

$b_1,\ b_2, \ldots, \ b_\beta$ частные виды событія B,

. . . .

$g_1,\ g_2, \ldots, \ g_\omega$ частные виды событія G;

такъ что при существованіи A должно быть одно и только одно изъ событій

$$a_1,\ a_2, \ldots, \ a_\alpha,$$

при существованіи B должно быть одно и только одно изъ событій

$$b_1,\ b_2, \ldots, \ b_\beta$$

и т. д.

Событія

$$a_1,\ a_2, \ldots, \ a_\alpha,\ b_1,\ b_2, \ldots, \ b_\beta, \ldots, \ g_1,\ g_2, \ldots, \ g_\omega,$$

конечно, несовмѣстны; кромѣ того мы предполагаемъ ихъ, какъ было уже сказано, равновозможными.

При такихъ предположеніяхъ мы назовемъ вѣроятностями событій

$$A,\ B,\ C, \ldots, \ G$$

соотвѣтственно дроби

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\ldots+\omega},\ \frac{\beta}{\alpha+\beta+\ldots+\omega},\ldots,\ \frac{\omega}{\alpha+\beta+\ldots+\omega}\quad(1).$$

Условимся называть событія

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_\alpha,$$

при которыхъ имѣетъ мѣсто A, *благопріятными* для A, событія

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ b_\beta$$

благопріятными для B и т. д.; всѣ же равновозможныя событія

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_\alpha,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_\beta,\ldots,\ g_1,\ g_2,\ldots,\ g_\omega$$

будемъ называть событіями или случаями соотвѣтствующими вопросу.

Установивъ эти названія, мы можемъ формулировать данное нами опредѣленіе вѣроятности слѣдующимъ образомъ.

Вѣроятностью событія называется дробь, числитель которой представляетъ число равновозможныхъ случаевъ, благопріятныхъ этому событію, а знаменатель число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, соотвѣтствующихъ вопросу.

На этомъ опредѣленіи вѣроятности и будутъ основаны дальнѣйшіе выводы.

По установленному нами опредѣленію вѣроятность представляется раціональнымъ числомъ, лежащимъ между нулемъ и единицей.

Опредѣляя же вѣроятности нѣкоторыхъ событій, какъ предѣлы вѣроятностей другихъ событій, мы введемъ ирраціональныя числа. О введеніи въ исчисленіе вѣроятностей ирраціональныхъ чиселъ мы будемъ говорить подробнѣе впослѣдствіи.

Предѣльными величинами вѣроятности различныхъ событій служатъ единица и нуль.

Вѣроятность достигаетъ значенія единицы для событій достовѣрныхъ, которымъ благопріятствуютъ всѣ случаи, и обращается въ нуль для событій невозможныхъ, которымъ не благопріятствуетъ ни одинъ случай.

И мы можемъ утверждать, что вѣроятность единица указываетъ на достовѣрность событія, а вѣроятность нуль на невозможность его, по крайней мѣрѣ тогда, когда эта вѣроятность установлена прямымъ счетомъ равновозможныхъ случаевъ.

§ 2. Для выясненія понятія о вѣроятности какъ о числѣ обратимся къ слѣдующему примѣру, которымъ будемъ пользоваться и далѣе.

Пусть взятъ сосудъ, содержащій a бѣлыхъ шаровъ съ № 1, b бѣлыхъ шаровъ съ № 2, c черныхъ шаровъ съ № 1, d черныхъ шаровъ съ № 2 и не содержащій никакихъ другихъ шаровъ.

Изъ этого сосуда вынутъ одинъ шаръ и поставленъ вопросъ о цвѣтѣ, или о нумерѣ его, или наконецъ о цвѣтѣ и нумерѣ.

Въ данномъ случаѣ испытаніе состоитъ въ томъ, что изъ сосуда вынимаютъ нѣкоторый опредѣленный шаръ.

Если мы видѣли этотъ шаръ, то можемъ дать на поставленный вопросъ опредѣленный отвѣтъ.

Если же вынутаго шара мы не видѣли и извѣстны намъ только вышеуказанныя обстоятельства, то на вопросъ о цвѣтѣ шара мы отвѣтимъ:

либо бѣлый, либо черный,

указывая такимъ образомъ два возможныхъ событія; на вопросъ о нумерѣ шара перечислимъ также два событія:

№ 1 и № 2;

наконецъ нашъ отвѣтъ о цвѣтѣ и нумерѣ шара будетъ состоять въ перечисленіи четырехъ событій:

бѣлый съ № 1, бѣлый съ № 2, черный съ № 1, черный съ № 2.

Останавливаясь на послѣднемъ вопросѣ, предположимъ сначала, что всѣ наши данныя состоятъ только въ томъ, что сосудъ, изъ котораго вынутъ шаръ, не содержитъ другихъ шаровъ, кромѣ бѣлыхъ и черныхъ съ нумерами 1 и 2.

Тогда перечисленныя нами четыре несовмѣстныхъ событія,

бѣлый съ № 1, бѣлый съ № 2, черный съ № 1, черный съ № 2,

будутъ не только единственно возможными, но и равновозможными, и соотвѣтственно этому вѣроятность каждаго изъ нихъ будетъ выражаться дробью $\frac{1}{4}$.

При тѣхъ же данныхъ вѣроятность, что шаръ бѣлый, будетъ $\frac{1}{2}$; такъ какъ появленіе бѣлаго шара и появленіе чернаго шара будутъ также событіями несовмѣстными, единственно возможными и равновозможными.

Положимъ теперь, что намъ извѣстны неравенства

$$a > b > c > д.$$

Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ основаніе ожидать бѣлаго шара съ № 1 предпочтительно передъ бѣлымъ шаромъ съ № 2; мы имѣемъ также основаніе ожидать бѣлаго шара съ № 2 предпочтительно передъ чернымъ шаромъ съ № 1.

Поэтому, если извѣстны неравенства

$$a > b > c > д,$$

то четыре событія,

бѣлый съ № 1, бѣлый съ № 2, черный съ № 1, черный съ № 2,

перестаютъ быть равновозможными.

И мы лишены возможности разбить ихъ на равновозможныя, если только намъ ничего неизвѣстно кромѣ неравенствъ

$$a > b > c > д.$$

При такихъ условіяхъ мы вынуждены отказаться отъ представленія вѣроятностей нашихъ событій опредѣленными числами.

Пусть наконецъ намъ извѣстны числа

$$a,\ b,\ c,\ д.$$

Тогда для полученія равновозможныхъ событій мы можемъ разбить разсматриваемыя четыре событія на болѣе частныя.

Съ этою цѣлью отличимъ мысленно всѣ шары другъ отъ друга какими нибудь значками, напримѣръ новыми нумерами.

Итакъ вообразимъ, что бѣлые шары съ № 1 отличаются другъ отъ друга и отъ прочихъ шаровъ нумерами

$$1, 2, 3, \ldots, a,$$

бѣлые шары съ № 2 отличаются нумерами

$$a+1,\ a+2, \ldots, a+b,$$

черные съ № 1 отличаются нумерами

$$a+b+1,\ a+b+2, \ldots, a+b+c$$

и наконецъ черные съ № 2 отличаются нумерами

$$a+b+c+1,\ a+b+c+2, \ldots, a+b+c+д.$$

Различивъ всѣ шары другъ отъ друга, мы можемъ разбить разсматриваемыя четыре событія на

$$a+b+c+д$$

событій, каждое изъ которыхъ состоитъ въ появленіи шара съ опредѣленнымъ нумеромъ

$$1, 2, 3, \ldots, a+b+c+д.$$

Эти новыя событія равновозможны, такъ какъ въ сосудѣ находится по одному шару съ каждымъ нумеромъ

$$1, 2, \ldots, a+b+c+д,$$

и потому нѣтъ никакихъ основаній ожидать появленія одного изъ этихъ нумеровъ, предпочтительно передъ какимъ либо другимъ изъ нихъ.

Изъ нихъ a событій, состоящія въ появленіи нумеровъ

$$1, 2, 3, \ldots, a,$$

благопріятствуютъ появленію бѣлаго шара съ № 1, такъ какъ они представляютъ частные случаи послѣдняго событія.

Поэтому, согласно опредѣленію, вѣроятность появленія бѣлаго шара съ № 1 выразится дробью

$$\frac{a}{a+b+c+д},$$

На томъ же основаніи дробь

$$\frac{b}{a+b+c+d}$$

будетъ выражать вѣроятность выхода бѣлаго шара съ № 2, дробь

$$\frac{c}{a+b+c+d}$$

будетъ выражать вѣроятность выхода чернаго шара съ № 1 и наконецъ дробь

$$\frac{d}{a+b+c+d}$$

будетъ вѣроятностью выхода чернаго шара съ № 2.

Если же вмѣсто четырехъ событій мы различимъ только два, изъ которыхъ одно состоитъ въ появленіи бѣлаго шара, а другое въ появленіи чернаго шара, то ихъ вѣроятности соотвѣтственно выразятся дробями

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} \text{ и } \frac{c+d}{a+b+c+d}.$$

Положимъ теперь, что къ указаннымъ прежде даннымъ прибавлено еще одно; именно, стало извѣстнымъ, какой изъ двухъ нумеровъ, 1 и 2, стоитъ на вынутомъ шарѣ.

Это новое данное измѣняетъ величину вѣроятности вынутому шару быть бѣлымъ.

Именно, если извѣстно, что на вынутомъ шарѣ стоитъ № 1, то на основаніи соображеній, подобныхъ прежнимъ, мы должны выразить вѣроятность, что этотъ шаръ бѣлый, дробью

$$\frac{a}{a+c},$$

а вѣроятность, что онъ черный, дробью

$$\frac{c}{a+c}.$$

Если же извѣстно, что на вынутомъ шарѣ стоитъ № 2, то вѣроятность, что онъ бѣлый, выразится дробью

$$\frac{b}{b+d}$$

и вѣроятность, что онъ черный,—дробью

$$\frac{\partial}{b+\partial}.$$

Приведенный нами примѣръ можетъ служить для поясненія слѣдующей аксіомы *).

Если при извѣстныхъ данныхъ событія

$$p, q, r, \ldots, u, v$$

равновозможны и дѣлятся по отношенію къ событію A на благопріятныя и неблагопріятныя ему, то по присоединеніи къ этимъ даннымъ указанія на появленіе событія A тѣ изъ событій

$$p, q, r, \ldots, u, v,$$

которыя не благопріятствуютъ событію A, становятся невозможными и слѣдовательно отпадаютъ, остальныя же изъ нихъ остаются по прежнему равновозможными.

Приведенный нами примѣръ показалъ также, что далеко не во всѣхъ случаяхъ можно разсматривать вѣроятность какъ опредѣленное число.

Не останавливаясь на другихъ примѣрахъ несуществованія вѣроятности какъ опредѣленнаго числа, замѣтимъ, что не одно исчисленіе вѣроятностей, но и другія науки занимаются приближеннымъ разысканіемъ такихъ чиселъ, существованіе которыхъ не установлено и не можетъ быть установлено съ математическою строгостью. Науки основанныя на опытахъ стремятся, конечно, къ возможной степени строгости, но не могутъ имѣть въ виду математическую строгость.

Опытнымъ наукамъ слѣдуетъ уподобить и многіе отдѣлы исчисленія вѣроятностей.

§ 3. Основными теоремами исчисленія вѣроятностей мы считаемъ только двѣ, извѣстныя подъ названіемъ *теоремы сложенія* и *теоремы умноженія вѣроятностей*.

*) Аксіомой мы называемъ такое положеніе, которое устанавливается безъ доказательства какъ основаніе нашихъ разсужденій.

Доказательство этихъ теоремъ не представляетъ затрудненій, но соединено съ упомянутымъ выше допущеніемъ, что всѣ событія можно приводить къ равновозможнымъ.

Теорема сложенія вѣроятностей.

Вѣроятность случиться одному изъ несовмѣстныхъ событій, безъ указанія какому именно, равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій.

Доказательство.

Пусть будутъ

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k$$

несовмѣстныя событія.

Пусть далѣе

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n$$

означаютъ случаи единственно возможные, несовмѣстные и равновозможные, изъ которыхъ m_1 случаевъ благопріятствуютъ событію E_1, остальные же не благопріятствуютъ ему, m_2 случаевъ благопріятствуютъ событію E_2, остальные же не благопріятствуютъ ему и т. д., наконецъ m_k случаевъ благопріятствуютъ событію E_k, а остальные не благопріятствуютъ ему.

При такихъ предположеніяхъ вѣроятности событій

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k$$

выражаются, согласно опредѣленію, дробями

$$\frac{m_1}{n},\ \frac{m_2}{n}, \ldots,\ \frac{m_k}{n}.$$

Въ виду несовмѣстности событій

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k$$

всѣ случаи, благопріятные для опредѣленнаго изъ нихъ, не благопріятствуютъ остальнымъ изъ этихъ событій.

Поэтому, если къ m_1 случаямъ благопріятнымъ для E_1, мы присоединимъ m_2 случаевъ, благопріятныхъ для E_2, m_3 случаевъ, благопріятныхъ для E_3 и т. д., наконецъ m_k случаевъ, благо-

пріятныхъ для E_k, то среди полученныхъ нами такимъ образомъ

$$m_1 + m_2 + \ldots . + m_k$$

случаевъ не будетъ одинаковыхъ.

Эти различные между собой случаи, число которыхъ равно $m_1 + m_2 + \ldots . + m_k$, благопріятствуютъ появленію того или другого изъ событій

$$E_1, E_2, \ldots . E_k,$$

остальные же изъ разсматриваемыхъ нами n случаевъ

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

не благопріятствуютъ ни одному изъ событій

$$E_1, E_2, \ldots . E_k.$$

Слѣдовательно вѣроятность появленія одного изъ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_k,$$

безъ указанія какого именно, выразится, согласно опредѣленію, дробью

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n}.$$

Остается замѣтить, что послѣдняя дробь равна суммѣ

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \ldots . + \frac{m_k}{n},$$

и теорема доказана.

Примѣчаніе. Разсуждая подобно предыдущему, нетрудно замѣтить, что сумма вѣроятностей событій не несовмѣстныхъ представляетъ величину большую чѣмъ вѣроятность случиться одному изъ нихъ.

Разсматривая событія

$$E_1, E_2, \ldots . E_n$$

какъ различные виды одного событія E, мы можемъ выразить теорему сложенія вѣроятностей еще слѣдующимъ образомъ.

Если нѣкоторое событіе E разбивается на нѣсколько несовмѣстныхъ видовъ, то его вѣроятность равна суммѣ вѣроятностей всѣхъ этихъ видовъ.

Для поясненія теоремы сложенія вѣроятностей обратимся къ прежнему примѣру.

Вѣроятности появленія бѣлаго шара съ № 1, бѣлаго съ № 2, чернаго съ № 1 и чернаго съ № 2 выражались у насъ соотвѣтственно дробями

$$\frac{a}{a+b+c+\partial}, \quad \frac{b}{a+b+c+\partial}, \quad \frac{c}{a+b+c+\partial}, \quad \frac{\partial}{a+b+c+\partial}.$$

Складывая первыя двѣ изъ этихъ дробей, получаемъ въ суммѣ дробь

$$\frac{a+b}{a+b+c+\partial},$$

равную вѣроятности появленія бѣлаго шара съ № 1 или бѣлаго же съ № 2, т. е. вѣроятность, что вынуть шаръ бѣлаго цвѣта.

Подобнымъ же образомъ сумма

$$\frac{a}{a+b+c+\partial}+\frac{c}{a+b+c+\partial}=\frac{a+c}{a+b+c+\partial}$$

представляетъ вѣроятность, что на вынутомъ шарѣ стоитъ № 1.

Однимъ изъ слѣдствій теоремы сложенія вѣроятностей можно считать такое положеніе.

Сумма вѣроятностей событій единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ равна единицѣ.

Въ справедливости этого положенія можно убѣдиться непосредственно; для вывода же его изъ теоремы сложенія вѣроятностей достаточно замѣтить, что появленіе одного изъ единственно возможныхъ событій представляетъ событіе достовѣрное, вѣроятность котораго равна единицѣ.

Особенно важенъ случай двухъ единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ событій; такія событія мы будемъ называть *противоположными.*

Каждому событію (*A*) соотвѣтствуетъ противоположное, состоящее въ непоявленіи перваго (*A*).

Въ прежнемъ примѣрѣ бѣлый и черный цвѣтъ вынутаго шара будутъ два противоположныхъ событія. Для появленія же бѣлаго шара съ № 1 противоположнымъ событіемъ будетъ появленіе чернаго шара или бѣлаго съ № 2.

Сумма вѣроятностей двухъ противоположныхъ событій составляетъ единицу; поэтому, имѣя вѣроятность p одного изъ нихъ, мы получимъ вѣроятность q другого, вычтя первую вѣроятность изъ единицы:

$$p+q=1\,,\ q=1-p\,,\ p=1-q\,.$$

Если событіе A достовѣрно, то противоположное ему невозможно; тогда вѣроятность событія A равна единицѣ, а вѣроятность противоположнаго ему равна нулю.

Если же событіе A невозможно, то противоположное ему достовѣрно; тогда вѣроятность событія A равна нулю, а вѣроятность противоположнаго равна единицѣ.

Чѣмъ ближе вѣроятность событія къ единицѣ, тѣмъ больше имѣемъ мы основаній ожидать появленія такого событія и не ожидать противоположнаго событія.

Въ вопросахъ же практическаго характера мы можемъ быть вынуждены разсматривать событія, вѣроятность которыхъ болѣе или менѣе близка къ единицѣ, какъ достовѣрныя и событія, вѣроятность которыхъ мала, какъ невозможныя.

Соотвѣтственно этому одна изъ важнѣйшихъ задачъ исчисленія вѣроятностей состоитъ въ разысканіи такихъ событій, вѣроятности которыхъ близки къ единицѣ или къ нулю.

§ 4. **Теорема умноженія вѣроятностей.**

Вѣроятность случиться двумъ событіямъ вмѣстѣ равна произведенію вѣроятности одного изъ нихъ на вѣроятность другого, вычисленную въ предположеніи, что первое имѣетъ мѣсто.

Доказательство.

Пусть изъ n единственно возможныхъ, несовмѣстныхъ и равновозможныхъ случаевъ

$$C_1,\ C_2,\dots,\ C_m,\ C_{m+1},\dots,\ C_{m_1},\ C_{m_1+1},\dots,\ C_n$$

благопріятствуютъ нѣкоторому событію A первые m_1 случаевъ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m,\ C_{m+1}, \ldots,\ C_{m_1},$$

остальные же ему не благопріятствуютъ.

Пусть далѣе изъ случаевъ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m,\ C_{m+1}, \ldots,\ C_{m_1}$$

первые m случаевъ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m$$

благопріятствуютъ другому событію B, остальные же ему не благопріятствуютъ.

При такихъ условіяхъ вѣроятность событія A выражается дробью

$$\frac{m_1}{n}.$$

Вѣроятность же событія B, когда извѣстно существованіе событія A, выражается дробью

$$\frac{m}{m_1};$$

такъ какъ при существованіи событія A случаи

$$C_{m_1+1},\ C_{m_1+2}, \ldots,\ C_n$$

невозможны, а случаи

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_{m_1}$$

остаются по прежнему равновозможными.

Наконецъ вѣроятность появленія обоихъ событій A и B выражается дробью

$$\frac{m}{n},$$

такъ какъ оба событія A и B появляются только при случаяхъ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m$$

Замѣчая, что дробь

$$\frac{m}{n}$$

равна произведенію

$$\frac{m_1}{n} \cdot \frac{m}{m_1},$$

мы можемъ признать теорему умноженія вѣроятностей доказанною.

Для поясненія ея можетъ служить прежній примѣръ.

Въ этомъ примѣрѣ рѣчь шла о шарѣ, вынутомъ изъ сосуда, который содержитъ *a* бѣлыхъ шаровъ съ № 1, *b* бѣлыхъ съ № 2, *c* черныхъ съ № 1, *д* черныхъ съ № 2 и не содержитъ никакихъ другихъ шаровъ.

Предполагая *a*, *b*, *c*, *д* числами данными, мы установили для вѣроятности выхода бѣлаго шара величину

$$\frac{a+b}{a+b+c+д}.$$

Затѣмъ вѣроятность выхода шара съ № 1 выражается дробью

$$\frac{a+c}{a+b+c+д};$$

вѣроятность же выхода шара съ № 1, когда извѣстно, что онъ бѣлый, выражается дробью

$$\frac{a}{a+b}.$$

Помножая послѣднюю дробь на $\frac{a+b}{a+b+c+д}$, получаемъ величину

$$\frac{a+b}{a+b+c+д} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+b+c+д},$$

равную вѣроятности, что вынутый шаръ бѣлый и съ № 1.

Ту же величину $\frac{a}{a+b+c+д}$ мы получимъ, если помножимъ дробь

$$\frac{a+c}{a+b+c+д},$$

равную вѣроятности выхода шара съ № 1, на дробь

$$\frac{a}{a+c},$$

которая выражаетъ вѣроятность, что вынутый шаръ бѣлаго цвѣта, когда извѣстно, что на немъ стоитъ № 1.

Считаемъ не лишнимъ выразить теорему умноженія вѣроятностей формулою:

$$(AB) = (A)\,(B,\ A) = (B)\,(A,\ B) \qquad (2)$$

гдѣ (AB) означаетъ вѣроятность появленія двухъ событій A и B вмѣстѣ, (A) и (B) означаютъ соотвѣтственно вѣроятности событій A и B, наконецъ $(B,\ A)$ означаетъ вѣроятность событія B, когда извѣстно существованіе A, и $(A,\ B)$ означаетъ вѣроятность событія A, когда извѣстно существованіе B.

Теорема умноженія вѣроятностей можетъ быть слѣдующимъ образомъ распространена на случай многихъ событій.

Если, расположивъ нѣсколько событій въ любомъ порядкѣ, мы возьмемъ вѣроятность каждаго изъ нихъ въ предположеніи, что предыдущія имѣютъ мѣсто; то произведеніе всѣхъ этихъ вѣроятностей будетъ выражать вѣроятность случиться всѣмъ разсматриваемымъ событіямъ вмѣстѣ.

Соотвѣтственно этому можемъ написать формулу

$$(E_1\,E_2 \ldots E_k) = (E_1)\,(E_2,\ E_1)\,(E_3,\ E_1\,E_2) \ldots (E_k,\ E_1\,E_2 \ldots E_{k-1})$$

гдѣ $(E_1\,E_2 \ldots E_k)$ означаетъ вѣроятность случиться всѣмъ событіямъ $E_1,\ E_2 \ldots E_k$ вмѣстѣ, символъ (E_1) означаетъ вѣроятность событія E_1 и наконецъ подъ $(E_i,\ E_1\,E_2 \ldots E_{i-1})$, при $i = 2,\ 3 \ldots k$, мы подразумѣваемъ вѣроятность событія E_i, когда извѣстно существованіе событій $E_1,\ E_2, \ldots E_{i-1}$.

Къ указанному обобщенію теоремы умноженія вѣроятностей мы можемъ придти, переходя послѣдовательно отъ случая двухъ событій къ случаю трехъ, отъ случая трехъ къ случаю четырехъ событій и т. д.

Для выясненія хода разсужденій достаточно показать какимъ образомъ случай трехъ событій сводится къ случаю двухъ событій; такъ какъ подобнымъ же путемъ случай четырехъ событій сводится къ случаю трехъ событій и т. д.

Для того, чтобы существовали три событія

$$E_1,\ E_2,\ E_3,$$

необходимо существованіе двухъ изъ нихъ.

Если разсматривать затѣмъ существованіе двухъ событій E_1 и E_2 какъ одно событіе F; то существованіе трехъ событій E_1, E_2, E_3 будетъ тожественно существованію двухъ событій F и E_3.

Поэтому, примѣняя два раза теорему умноженія вѣроятностей для разсмотрѣннаго уже случая двухъ событій, можемъ установить два равенства

$$(E_1 E_2 E_3) = (E_1 E_2)\,(E_3,\ E_1 E_2)$$

и

$$(E_1 E_2) = (E_1)\,(E_2,\ E_1),$$

изъ которыхъ тотчасъ выводимъ

$$(E_1 E_2 E_3) = (E_1)\,(E_2,\ E_1)\,(E_3,\ E_1 E_2).$$

Теорема умноженія вѣроятностей упрощается въ одномъ важномъ случаѣ, когда дѣло идетъ о событіяхъ *независимыхъ*.

Нѣсколько событій

$$E_1,\ E_2,\ldots,\ E_k$$

мы называемъ *независимыми* другъ отъ друга, если вѣроятность каждаго изъ нихъ не зависитъ отъ существованія или несуществованія остальныхъ; такъ что никакое указаніе на существованіе или несуществованіе какихъ нибудь изъ событій

$$E_1,\ E_2,\ldots,\ E_k$$

не мѣняетъ вѣроятностей прочихъ.

Если событія

$$E_1,\ E_2,\ldots,\ E_k$$

не зависятъ другъ отъ друга, то вѣроятность каждаго изъ нихъ при существованіи предыдущихъ, разсматриваемая въ теоремѣ,

совпадаетъ съ вѣроятностью того же событія, опредѣленною независимо отъ существованія или несуществованія другихъ.

Соотвѣтственно этому, примѣняя теорему умноженія вѣроятностей къ независимымъ событіямъ, мы можемъ придать ей слѣдующее болѣе простое выраженіе: *вѣроятность случиться одновременно нѣсколькимъ независимымъ событіямъ равна произведенію ихъ вѣроятностей.*

Примѣчаніе 1. Понятіе о независимыхъ событіяхъ можно считать вполнѣ яснымъ въ извѣстныхъ теоретическихъ вопросахъ; въ другихъ же вопросахъ это понятіе, конечно, можетъ совершенно затемняться вмѣстѣ съ затемненіемъ основного понятія о вѣроятности.

Примѣчаніе 2. Во многихъ случаяхъ зависимость или независимость событій другъ отъ друга можетъ обусловливаться не только сущностью этихъ событій, но и данными, при которыхъ разсматриваются ихъ вѣроятности.

Слѣдующій примѣръ можетъ служить для поясненія послѣдняго примѣчанія.

Положимъ, что мы имѣемъ два сосуда C и D, первый изъ которыхъ C содержитъ только черные шары, а второй D содержитъ a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ и никакихъ другихъ.

Беремъ одинъ изъ этихъ сосудовъ, изъ него вынимаемъ на удачу шаръ, затѣмъ возвращаемъ вынутый шаръ обратно въ сосудъ и вынимаемъ на удачу второй шаръ изъ того же сосуда.

Требуется опредѣлить вѣроятность, что оба вынутые такимъ образомъ шара будутъ бѣлыми.

При разсмотрѣніи этого вопроса мы различимъ два предположенія.

Начнемъ съ предположенія, что намъ извѣстно, изъ какого именно сосуда мы вынимаемъ шары.

Если извѣстно, что шары мы вынимаемъ изъ сосуда C, содержащаго только черные шары, то вѣроятность появленія бѣлаго шара равна нулю, какъ для перваго, такъ и для второго шара.

Если же извѣстно, что шары мы вынимаемъ изъ сосуда D, то вѣроятность появленія бѣлаго шара выражается дробью

$$\frac{a}{a+b},$$

какъ для перваго, такъ и для второго шара, независимо отъ того, былъ ли первый шаръ бѣлаго или чернаго цвѣта; такъ какъ по условіямъ вопроса, прежде чѣмъ вынуть второй шаръ, мы должны возвратить обратно въ сосудъ первый вынутый шаръ и слѣдовательно мы вынимаемъ на удачу второй шаръ, какъ и первый, изъ сосуда, содержащаго a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ.

Соотвѣтственно этому вѣроятность, что оба вынутые нами шара бѣлаго цвѣта, выражается, согласно теоремѣ умноженія вѣроятностей, произведеніемъ

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b},$$

если извѣстно, что взятъ сосудъ D.

Какой бы сосудъ мы ни взяли, бѣлый цвѣтъ перваго шара и бѣлый цвѣтъ второго шара представляютъ два независимыхъ событія, коль скоро извѣстно, изъ какого именно сосуда вынимаемъ мы шары.

Положимъ теперь, что остается неизвѣстнымъ, взятъ ли нами сосудъ C или сосудъ D.

Затѣмъ для опредѣленія вѣроятности бѣлаго цвѣта перваго вынутаго нами шара замѣтимъ, что вынутые нами шары могутъ быть бѣлыми только въ томъ случаѣ, когда нами взятъ сосудъ D

И на этомъ основаніи будемъ разсматривать бѣлый цвѣтъ перваго шара какъ совокупность двухъ событій, изъ которыхъ одно состоитъ въ томъ, что взятъ сосудъ D, а другое въ томъ, что вынутъ бѣлый шаръ.

Вѣроятность, что взятъ сосудъ D, равна $\frac{1}{2}$; такъ какъ кромѣ сосуда D мы могли взять также и сосудъ C, и два эти событія единственно возможны, не совмѣстны и равновозможны.

Вѣроятность, что вынутъ бѣлый шаръ, выражается дробью

$$\frac{a}{a+b},$$

когда извѣстно, что взятъ сосудъ D.

Поэтому вѣроятность бѣлаго цвѣта перваго шара выражается простымъ произведеніемъ

$$\frac{1}{2}\,\frac{a}{a+b},$$

на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей.

И не трудно понять, что къ тому же числу

$$\frac{a}{2\,(a+b)}$$

должна приводиться вѣроятность бѣлаго цвѣта второго шара, пока цвѣтъ перваго шара не установленъ.

Но не съ этой вѣроятностью мы должны имѣть дѣло, когда желаемъ получить вѣроятность, что оба шара бѣлые.

Чтобы примѣнить къ разысканію послѣдней вѣроятности теорему умноженія вѣроятностей, надо взять вѣроятность бѣлаго цвѣта второго шара при условіи, что первый шаръ бѣлый.

Бѣлый же цвѣтъ перваго шара указываетъ, что взятъ сосудъ D, послѣ чего вѣроятность появленія бѣлаго шара становится равною

$$\frac{a}{a+b}.$$

Помноживъ послѣднюю дробь на $\frac{a}{2\,(a+b)}$, получаемъ искомую вѣроятность

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{2\,(a+b)}=\frac{a^2}{2\,(a+b)^2},$$

что оба шара, вынутые нами, бѣлаго цвѣта.

Итакъ, пока неизвѣстно, какой изъ двухъ сосудовъ C и D взятъ нами, бѣлый цвѣтъ перваго шара и бѣлый цвѣтъ второго шара не представляютъ двухъ независимыхъ событій; напротивъ, эти событія оказываются незавясящими другъ отъ друга, коль скоро становится извѣстнымъ, взятъ ли нами сосудъ C или сосудъ D.

ГЛАВА II.

О повторенiи испытанiй.

§ 5. Одна изъ важныхъ задачъ исчисленiя вѣроятностей состоитъ въ разсмотрѣнiи возможныхъ результатовъ нѣсколькихъ испытанiй, при каждомъ изъ которыхъ можетъ случиться нѣкоторое событiе E.

Условимся отличать эти испытанiя другъ отъ друга нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

и будемъ обозначать буквою F, для каждаго изъ нихъ, событiе противоположное событiю E.

Останавливаясь сначала на двухъ испытанiяхъ, мы можемъ различить четыре случая:

$$EE,\ EF,\ FE,\ FF.$$

Первый изъ этихъ случаевъ состоитъ въ появленiи событiя E при обоихъ испытанiяхъ; второй — въ появленiи E при первомъ испытанiи и непоявленiи E при второмъ испытанiи и т. д.

Прежде чѣмъ приступить къ разсмотрѣнiю вѣроятностей указанныхъ нами четырехъ случаевъ, установимъ понятiе о независимыхъ испытанiяхъ, которыми и будемъ исключительно заниматься.

Нѣсколько испытанiй мы называемъ *независимыми* по отно-

шенію къ событію E, если вѣроятность событія E при каждомъ изъ нихъ не зависитъ отъ результатовъ прочихъ.

Предполагая разсматриваемыя два испытанія независимыми, обозначимъ черезъ p_1 вѣроятность событія E при первомъ испытаніи, а черезъ p_2 вѣроятность событія E при второмъ испытаніи.

Тогда вѣроятность F при первомъ испытаніи будетъ выражаться разностью $1-p_1$, которую мы обозначимъ черезъ q_1; вѣроятность же событія F при второмъ испытаніи выразится разностью $1-p_2$, которую мы обозначимъ черезъ q_2.

При такихъ предположеніяхъ и обозначеніяхъ, пользуясь теоремой умноженія вѣроятностей, находимъ для вышеупомянутыхъ четырехъ случаевъ

$$EE,\ EF,\ FE,\ FF$$

соотвѣтственно слѣдующія вѣроятности

$$p_1 p_2,\ p_1 q_2,\ q_1 p_2,\ q_1 q_2.$$

Разсматривая затѣмъ второй и третій случаи какъ частные виды одного событія, состоящаго въ однократномъ появленіи событія E, заключаемъ, что вѣроятность однократнаго появленія событія E, при разсматриваемыхъ нами двухъ испытаніяхъ, выражается суммою

$$p_1 q_2 + q_1 p_2.$$

Итакъ, различая при двухъ испытаніяхъ три случая, изъ которыхъ первый состоитъ въ двукратномъ появленіи событія E, второй въ однократномъ его появленіи и третій въ совершенномъ непоявленіи событія E, мы находимъ для этихъ случаевъ такія вѣроятности:

$$p_1 p_2,\ p_1 q_2 + q_1 p_2,\ q_1 q_2.$$

Замѣтимъ, что эти три числа представляютъ соотвѣтственно коэффиціенты при ξ^2, ξ и ξ^0 въ разложеніи произведенія

$$(p_1 \xi + q_1)(p_2 \xi + q_2)$$

по степенямъ произвольнаго числа ξ.

Нетрудно также видѣть, что сумма найденныхъ нами вѣроятностей

$$p_1 p_2, \ p_1 q_2 + q_1 p_2, \ q_1 q_2$$

составляетъ единицу, какъ и должно быть для вѣроятностей единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ событій.

Обращаясь къ тремъ испытаніямъ, мы можемъ различить восемь случаевъ, которые подобно прежнимъ четыремъ представимъ такъ:

$$EEE, \ EEF, \ EFE, \ FEE, \ EFF, \ FEF, \ FFE, \ FFF.$$

Предполагая три испытанія независимыми присоединимъ къ прежнимъ обозначеніямъ

$$p_1, \ q_1, \ p_2, \ q_2,$$

которыя относятся къ первымъ двумъ испытаніямъ, соотвѣтственныя обозначенія

$$p_3, \ q_3,$$

для вѣроятностей событія E и событія F при третьемъ испытаніи.

При такихъ условіяхъ вѣроятности вышеуказанныхъ восьми случаевъ выражаются, на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей, произведеніями

$$p_1 p_2 p_3, \ p_1 p_2 q_3, \ p_1 q_2 p_3, \ q_1 p_2 p_3, \ p_1 q_2 q_3, \ q_1 p_2 q_3, \ q_1 q_2 p_3, \ q_1 q_2 q_3.$$

Затѣмъ мы можемъ разсматривать случаи 2ой, 3ій и 4ый какъ частные виды одного событія, состоящаго въ двукратномъ появленіи событія E; мы можемъ также разсматривать случаи 5ый, 6ой и 7ой какъ частные виды другого событія, состоящаго въ однократномъ появленіи событія E.

Тогда при помощи теоремы сложенія вѣроятностей найдемъ, что при трехъ испытаніяхъ вѣроятность событію E случиться два раза, а противоположному одинъ, представляется суммою

$$p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3;$$

вѣроятность же событію E случиться одинъ разъ, а противоположному два раза представляется суммою

$$p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 .$$

Итакъ, различивъ при трехъ испытаніяхъ четыре случая, изъ которыхъ первый состоитъ въ трехкратномъ появленіи событія E, второй въ двукратномъ, третій въ однократномъ его появленіи, и, наконецъ, четвертый въ непоявленіи того же событія E, мы находимъ для этихъ четырехъ случаевъ соотвѣтственно слѣдующія вѣроятности

$$p_1 p_2 p_3, \quad p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3,$$

$$p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3, \quad q_1 q_2 q_3 .$$

Замѣтимъ, что полученныя нами четыре числа равны коэффиціентамъ при ξ^3, ξ^2, ξ, ξ^0 въ разложеніи произведенія

$$(p_1 \xi + q_1)(p_2 \xi + q_2)(p_3 \xi + q_3)$$

по степенямъ произвольнаго числа ξ; сумма же ихъ составляетъ единицу.

Прежде чѣмъ перейти къ общимъ формуламъ для любого числа независимыхъ испытаній, пояснимъ частнымъ примѣромъ разницу между независимыми и зависимыми испытаніями.

Положимъ, что мы вынимаемъ послѣдовательно нѣсколько шаровъ изъ сосуда, содержащаго a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ и несодержащаго никакихъ другихъ шаровъ.

Разсматривая затѣмъ выниманіе каждаго шара какъ отдѣльное испытаніе, различимъ столько испытаній, сколько мы вынемъ шаровъ.

Каждое испытаніе приводитъ къ появленію одного шара опредѣленнаго цвѣта; бѣлый цвѣтъ шара мы назовемъ событіемъ E, а черный событіемъ F.

Различимъ теперь два предположенія.

Сначала, чтобы имѣть примѣръ независимыхъ испытаній, положимъ, что каждый вынутый шаръ тотчасъ возвращается

обратно въ сосудъ для сохраненія неизмѣннымъ, какъ числа бѣлыхъ, такъ и числа черныхъ шаровъ въ сосудѣ.

Тогда вѣроятность событія E сохраняетъ для каждаго испытанія одну и ту же величину

$$\frac{a}{a+b},$$

независимо отъ результатовъ прочихъ испытаній; такъ какъ каждый шаръ мы вынимаемъ изъ сосуда, содержащаго a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ.

Перейдемъ къ другому предположенію, при которомъ разсматриваемыя нами испытанія не будутъ уже независимыми; именно, положимъ, что вынутые шары не возвращаются обратно въ сосудъ.

При такомъ предположеніи вѣроятность событія E для каждаго испытанія сохраняетъ прежнюю величину

$$\frac{a}{a+b}$$

до тѣхъ поръ, пока результаты прочихъ остаются неопредѣленными.

И не трудно опредѣлить, какъ измѣняется эта вѣроятность по мѣрѣ выясненія результатовъ нѣкоторыхъ испытаній.

Напримѣръ, если извѣстно, что вынутъ одинъ бѣлый шаръ, то вѣроятность вынуть другой бѣлый шаръ выразится дробью

$$\frac{a-1}{a+b-1};$$

такъ какъ этотъ другой шаръ долженъ принадлежать къ совокупности $a+b-1$ шаровъ, содержащей a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ.

Если же извѣстно, что вынутъ одинъ черный шаръ, то вѣроятность, что какой-нибудь другой изъ вынутыхъ нами шаровъ бѣлый, выразится дробью

$$\frac{a}{a+b-1};$$

такъ какъ этотъ другой шаръ долженъ принадлежать къ

совокупности $a+b-1$ шаровъ, содержащей a бѣлыхъ и $b-1$ черныхъ шаровъ.

И вообще, если среди вынутыхъ нами шаровъ извѣстно α бѣлыхъ и β черныхъ, то для каждаго изъ остальныхъ вѣроятность, что онъ бѣлый выразится дробью

$$\frac{a-\alpha}{a+b-\alpha-\beta},$$

такъ какъ этотъ шаръ долженъ принадлежать къ совокупности $a+b-\alpha-\beta$ шаровъ, содержащей $a-\alpha$ бѣлыхъ и $b-\beta$ черныхъ шаровъ.

§ 6. Обратимся къ общимъ формуламъ.

Теорема. *Если для n независимыхъ испытаній, которыя мы отличимъ другъ отъ друга нумерами*

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

вѣроятности событія E выражаются соотвѣтственно числами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n;$$

то вѣроятность, что событіе E появится въ эти n испытаній ровно m разъ, можетъ быть опредѣлена какъ коэффиціентъ при ξ^m въ разложеніи произведенія

$$(p_1\xi+q_1)(p_2\xi+q_2)\ldots(p_n\xi+q_n)$$

по степенямъ произвольнаго числа ξ, при чемъ

$$q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2, \ldots, q_n=1-p_n.$$

Для ознакомленія съ пріемами исчисленія вѣроятностей мы дадимъ два доказательства этой теоремы.

Первое доказательство.

Событіе, вѣроятность котораго мы ищемъ и которое состоитъ въ появленіи E ровно m разъ при n испытаніяхъ, можно разбить на нѣсколько несовмѣстныхъ видовъ. Каждый изъ этихъ видовъ состоитъ въ появленіи событія E при m опредѣленныхъ испытаніяхъ и непоявленіи E при остальныхъ $n-m$ испытаніяхъ.

Вѣроятность, что событіе E появится при m опредѣленныхъ испытаніяхъ и не появится при остальныхъ $n-m$ испытаніяхъ, опредѣляется по теоремѣ умноженія вѣроятностей.

Именно, въ силу этой теоремы вѣроятность, что событіе E появится при испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,$$

и не появится при остальныхъ $n-m$ испытаніяхъ, выражается произведеніемъ

$$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \ldots q_{\beta_{n-m}},$$

гдѣ

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-m}$$

нумера остальныхъ испытаній.

Замѣтимъ, что произведеніе

$$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \ldots q_{\beta_{n-m}}$$

можно получить изъ произведенія

$$q_1 q_2 \ldots q_n$$

черезъ замѣну множителей

$$q_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, \ldots, q_{\alpha_m}$$

множителями

$$p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_m}.$$

Опредѣливъ вѣроятности каждаго изъ упомянутыхъ нами видовъ и сложивъ ихъ, согласно теоремѣ сложенія вѣроятностей получимъ искомую вѣроятность событію E появиться ровно m разъ.

Итакъ вѣроятность, что въ разсматриваемыя нами n испытаній событіе E появится ровно m разъ, выражается суммою всѣхъ произведеній, которыя можно получить изъ одного

$$q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$$

черезъ замѣну въ m мѣстахъ буквы q буквою p.

Тою же суммою, какъ извѣстно, выражается коэффиціентъ при ξ^m въ разложеніи произведенія

$$(p_1 \xi + q_1)(p_2 \xi + q_2) \ldots (p_n \xi + q_n)$$

по степенямъ произвольнаго числа ξ.

Такимъ образомъ теорема доказана.

Второе доказательство.

Подразумѣвая подъ буквою k любое изъ чиселъ

$$1, 2, \ldots, n,$$

а подъ буквою i любое изъ чиселъ

$$0, 1, 2, \ldots, k,$$

обозначимъ символомъ

$$P_{i,k}$$

вѣроятность, что въ k испытаній, отмѣченныхъ нумерами

$$1, 2, \ldots, k,$$

событіе E появится ровно i разъ.

Затѣмъ, вводя произвольное число ξ, положимъ

$$\varphi_k(\xi) = P_{o,k} + P_{1,k}\,\xi + P_{2,k}\,\xi^2 + \ldots + P_{k,k}\,\xi^k$$

и разсмотримъ рядъ функцій

$$\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_{n-1}(\xi), \varphi_n(\xi).$$

Первая изъ нихъ $\varphi_1(\xi)$, очевидно, равна

$$p_1 \xi + q_1.$$

Остальныя же можно опредѣлить послѣдовательно на основаніи такой общей формулы

$$\varphi_{k+1}(\xi) = (p_{k+1}\xi + q_{k+1})\,\varphi_k(\xi),$$

которую мы сейчасъ установимъ.

Для намѣченной цѣли выяснимъ связь между

$$P_{i,k+1}, \quad P_{i,k} \quad \text{и} \quad P_{i-1,k}$$

при

$$0 < i < k+1$$

и обратимъ вниманіе на равенства

$$P_{k+1,\,k+1} = p_{k+1}\, P_{k,k} \quad \text{и} \quad P_{0,\,k+1} = q_{k+1}\, P_{0,k}.$$

При

$$0 < i < k+1$$

событіе, вѣроятность котораго обозначена символомъ

$$P_{i,\,k+1},$$

можно разбить на два вида въ зависимости отъ результата $k+1^{\text{го}}$ испытанія, которое можетъ сопровождаться появленіемъ или непоявленіемъ событія E.

Если при $k+1^{\text{мъ}}$ испытаніи событіе E имѣетъ мѣсто, то для того, чтобы общее число его появленій при $k+1$ испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2, \ldots,\ k,\ k+1,$$

равнялось i, это событіе E должно появиться при k испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2, \ldots,\ k,$$

ровно $i-1$ разъ.

Если же при $k+1^{\text{мъ}}$ испытаніи событіе E не имѣетъ мѣста, то для того, чтобы общее число его появленій при $k+1$ испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2, \ldots,\ k,\ k+1,$$

равнялось i, это событіе должно появиться при k испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2, \ldots,\ k,$$

ровно i разъ.

По теоремѣ умноженія вѣроятностей вѣроятность перваго вида выражается произведеніемъ

$$p_{k+1}\, P_{i-1,\,k},$$

а вѣроятность второго — произведеніемъ

$$q_{k+1} P_{i,\,k}.$$

Слѣдовательно, въ силу теоремы сложенія вѣроятностей, имѣемъ

$$P_{i,\,k+1} = p_{k+1} P_{i-1,\,k} + q_{k+1} P_{i,\,k}.$$

Что касается равенствъ

$$P_{k+1,\,k+1} = p_{k+1} P_{k,\,k} \quad \text{и} \quad P_{0,\,k+1} = q_{k+1} P_{0,\,k},$$

то для ихъ вывода достаточно одной теоремы умноженія вѣроятностей.

Дѣйствительно, появленіе событія E при первыхъ $k+1$ испытаніяхъ $k+1$ разъ можно разсматривать какъ существованіе двухъ событій, изъ которыхъ одно состоитъ въ появленіи E при $k+1^{мъ}$ испытаніи и имѣетъ вѣроятность p_{k+1}, а другое состоитъ въ появленіи E при первыхъ k испытаніяхъ k разъ и имѣетъ вѣроятность $P_{k,\,k}$. Поэтому произведеніе

$$p_{k+1} P_{k,\,k}$$

должно выражать вѣроятность событію E случиться въ первыя $k+1$ испытаній $k+1$ разъ, которая обозначена символомъ $P_{k+1,\,k+1}$.

Произведеніе же

$$q_{k+1} P_{0,\,k}$$

выражаетъ вѣроятность, что событіе E не имѣетъ мѣста при $k+1^{мъ}$ испытаніи и не появляется ни разу при первыхъ k испытаніяхъ; а эта вѣроятность совпадаетъ съ вѣроятностью $P_{0,\,k+1}$, что въ первыя $k+1$ испытаній событіе E вовсе не появится.

Примѣняя указанныя нами формулы къ каждому изъ коэффиціентовъ выраженія

$$\varphi_{k+1}(\xi) = P_{0,\,k+1} + P_{1,\,k+1}\,\xi + P_{2,\,k+1}\,\xi^2 + \ldots + P_{k+1,\,k+1}\,\xi^{k+1},$$

получаемъ

$$\varphi_{k+1}(\xi) = \begin{cases} q_{k+1} P_{0,\,k} + q_{k+1} P_{1,\,k}\,\xi + \ldots + q_{k+1} P_{k,\,k}\,\xi^k \\ \qquad + p_{k+1} P_{0,\,k}\,\xi + \ldots + p_{k+1} P_{k-1,\,k}\,\xi^k + p_{k+1} P_{k,\,k}\,\xi^{k+1}, \end{cases}$$

откуда тотчасъ выводимъ

$$\varphi_{k+1}(\xi)=(q_{k+1}+p_{k+1}\xi)(P_{0,k}+P_{1,k}\xi+\ldots+P_{k,k}\xi^k),$$

что даетъ намъ вышеуказанную формулу

$$\varphi_{k+1}(\xi)=(p_{k+1}\xi+q_{k+1})\,\varphi_k(\xi),$$

такъ какъ согласно принятымъ обозначеніямъ имѣемъ

$$P_{0,k}+P_{1,k}\xi+P_{2,k}\xi^2+\ldots+P_{k,k}\xi^k=\varphi_k(\xi).$$

Полагая k послѣдовательно равнымъ

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1,$$

получаемъ рядъ равенствъ

$$\varphi_2(\xi)=(p_2\xi+q_2)\,\varphi_1(\xi)=(p_2\xi+q_2)(p_1\xi+q_1),$$

$$\varphi_3(\xi)=(p_3\xi+q_3)\,\varphi_2(\xi),$$

. . . .

$$\varphi_n(\xi)=(p_n\xi+q_n)\,\varphi_{n-1}(\xi),$$

откуда посредствомъ умноженія, или простыхъ послѣдовательныхъ подстановокъ, выводимъ формулу

$$\varphi_n(\xi)=(p_1\xi+q_1)(p_2\xi+q_2)\ldots(p_n\xi+q_n) \qquad (3),$$

равносильную теоремѣ.

§ 7. Остановимся на важномъ частномъ случаѣ доказанной нами теоремы; именно, на томъ случаѣ, когда извѣстныя намъ условія для всѣхъ испытаній одинаковы и когда соотвѣтственно этому всѣ вѣроятности

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n$$

имѣютъ одну и ту же величину, которую мы обозначимъ просто буквою p.

Тогда произведеніе

$$(p_1\xi+q_1)(p_2\xi+q_2)\ldots(p_n\xi+q_n)$$

обращается въ степень двучлена

$$(p\xi + q)^n,$$

гдѣ

$$q = 1 - p.$$

И въ силу извѣстной формулы Ньютона, имѣемъ

$$P_{m,n} = \frac{1.2\ldots.n}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.(n-m)} p^m q^{n-m} \qquad (4).$$

Такъ выражается вѣроятность, что въ n независимыхъ испытаній событіе E появится ровно m разъ, если для каждаго испытанія въ отдѣльности вѣроятность этого событія равна p.

Выраженіе $P_{m,n}$, опредѣленное формулою (4), мы будемъ разсматривать при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ m.

Такимъ образомъ получимъ рядъ чиселъ

$$P_{0,n} = q^n,\ P_{1,n} = \frac{n}{1} pq^{n-1},\ P_{2,n} = \frac{n(n-1)}{1.2} p^2 q^{n-2}, \ldots,\ P_{n,n} = p^n,$$

которыя послѣдовательно представляютъ вѣроятности, что число появленій событія E, при n испытаніяхъ, имѣетъ значенія

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

При произвольно заданныхъ величинахъ p и n поставимъ себѣ цѣлью найти, для какого значенія m выраженіе

$$P_{m,n} = \frac{1.2\ldots.n}{1.2\ldots m.1.2\ldots.(n-m)} p^m q^{n-m}$$

достигаетъ своей наибольшей величины?

Это значеніе m мы назовемъ *наивѣроятнѣйшимъ* числомъ появленій событія E, такъ какъ ему соотвѣтствуетъ наибольшая вѣроятность $P_{m,n}$.

Для разысканія наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія E сравнимъ между собою каждые два смежныхъ члена ряда

$$P_{0,n},\ P_{1,n},\ P_{2,n}, \ldots,\ P_{n,n},$$

разсматривая ихъ отношеніе другъ къ другу.

Простое дѣленіе даетъ намъ равенство

$$\frac{P_{m+1,\,n}}{P_{m,\,n}} = \frac{n-m}{m+1}\,\frac{p}{q},$$

которое показываетъ, что отношеніе

$$\frac{P_{m+1,\,n}}{P_{m,\,n}}$$

убываетъ при возрастаніи числа m; отсюда вытекаютъ неравенства

$$\frac{P_{1,\,n}}{P_{0,\,n}} > \frac{P_{2,\,n}}{P_{1,\,n}} > \ldots > \frac{P_{n-1,\,n}}{P_{n-2,\,n}} > \frac{P_{n,\,n}}{P_{n-1,\,n}}.$$

Выдѣлимъ теперь два частныхъ предположенія.

Пусть сначала

$$\frac{P_{1,\,n}}{P_{0,\,n}} \leqq 1.$$

Тогда въ силу указанныхъ нами неравенствъ каждая изъ дробей

$$\frac{P_{2,\,n}}{P_{1,\,n}},\ \frac{P_{3,\,n}}{P_{2,\,n}},\ldots,\ \frac{P_{n,\,n}}{P_{n-1,\,n}}$$

меньше единицы и потому

$$P_{0,\,n} \geqq P_{1,\,n} > P_{2,\,n} > \ldots > P_{n-1,\,n} > P_{n,\,n}.$$

Съ другой стороны нетрудно замѣтить, что неравенство

$$\frac{P_{1,\,n}}{P_{0,\,n}} \leqq 1$$

равносильно неравенству

$$\frac{np}{q} \leqq 1,$$

а это послѣднее приводится къ неравенству

$$n+1 \leqq \frac{1}{p},$$

посредствомъ простой замѣны числа q разностью $1-p$.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что при

$$n+1 < \frac{1}{p}$$

наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленія событія E, для разсматриваемыхъ нами n испытаній, будетъ 0.

Если же

$$n+1=\frac{1}{p}$$

то для разсматриваемыхъ нами n испытаній наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E будетъ не только 0 но и 1, такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$P_{0,\,n}=P_{1,\,n}>P_{2,\,n}>\ldots.>P_{n,\,n}.$$

Подобнымъ же образомъ, предполагая

$$(n+1)\,q\leqq 1,$$

приходимъ къ неравенству

$$\frac{P_{n,\,n}}{P_{n-1,\,n}}\geqq 1$$

и затѣмъ выводимъ рядъ неравенствъ

$$P_{0,\,n}<P_{1,\,n}<P_{2,\,n}<\ldots.<P_{n-1,\,n}\leqq P_{n,\,n}.$$

Этотъ рядъ неравенствъ показываетъ, что при

$$n+1<\frac{1}{q}$$

наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E, для разсматриваемыхъ нами n испытаній, будетъ n.

Если же

$$n+1=\frac{1}{q},$$

то наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E будетъ не только n но и $n-1$; такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$P_{0,\,n}<P_{1,\,n}<\ldots.<P_{n-1,\,n}=P_{n,\,n}.$$

Исключая указанныя два предположенія, положимъ теперь

$$n+1>\frac{1}{p}\quad\text{и}\quad n+1>\frac{1}{q}.$$

Тогда

$$\frac{P_{1,\,n}}{P_{0,\,n}}>1, \quad \text{а} \quad \frac{P_{n,\,n}}{P_{n-1,\,n}}<1$$

и слѣдовательно рядъ убывающихъ дробей

$$\frac{P_{1,\,n}}{P_{0,\,n}},\ \frac{P_{2,\,n}}{P_{1,\,n}},\ldots\ldots,\ \frac{P_{n,\,n}}{P_{n-1,\,n}}$$

содержитъ, какъ числа большія единицы, такъ и числа меньшія единицы.

Отмѣчая переходъ отъ чиселъ большихъ единицы къ числамъ меньшимъ ея, положимъ

$$\frac{P_{1,\,n}}{P_{0,\,n}}>\frac{P_{2,\,n}}{P_{1,\,n}}>\ldots>\frac{P_{\mu,\,n}}{P_{\mu-1,\,n}}>1$$

и

$$1\geqq\frac{P_{\mu+1,\,n}}{P_{\mu,\,n}}>\frac{P_{\mu+2,\,n}}{P_{\mu+1,\,n}}>\ldots>\frac{P_{n,\,n}}{P_{n-1,\,n}}.$$

Эти неравенства равносильны слѣдующимъ

$$P_{0,\,n}<P_{1,\,n}<P_{2,\,n}<\ldots<P_{\mu-1,\,n}<P_{\mu,\,n}$$

и

$$P_{\mu,\,n}\geqq P_{\mu+1,\,n}>P_{\mu+2,\,n}>\ldots>P_{n,\,n},$$

которыя обнаруживаютъ, что введенное нами число μ представляетъ наивѣроятнѣйшее число появленій событія E, при разсматриваемыхъ нами n испытаніяхъ.

Наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E можетъ, кромѣ μ, быть и $\mu+1$, такъ какъ возможно равенство

$$P_{\mu,\,n}=P_{\mu+1,\,n}.$$

Для опредѣленія числа μ имѣемъ неравенства

$$\frac{P_{\mu,\,n}}{P_{\mu-1,\,n}}=\frac{n-\mu+1}{\mu}\,\frac{p}{q}>1$$

и

$$\frac{P_{\mu+1,\,n}}{P_{\mu,\,n}}=\frac{n-\mu}{\mu+1}\,\frac{p}{q}\leqq1,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$(n-\mu+1)\,p>\mu q,\quad (n+1)\,p>\mu\,(p+q)=\mu$$

и

$$(n-\mu)\,p \leqq (\mu+1)\,q,\ \ np-q \leqq \mu\,(p+q)=\mu,$$

слѣдовательно

$$np+p > \mu \geqq np-q \qquad (5).$$

Числа $np+p$ и $np-q$ отличаются другъ отъ друга только на одну единицу.

Поэтому, если $np+p$ число дробное, то $np-q$ также число дробное и въ промежуткѣ

отъ $np-q$ до $np+p$

заключается только одно цѣлое число.

Тогда наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E будетъ одно число μ, опредѣляемое неравенствами

$$np+p > \mu > np-q$$

какъ цѣлое число, лежащее въ промежуткѣ

отъ $np-q$ до $np+p$.

Если же $np+p$ число цѣлое, то $np-q$ также число цѣлое и нѣтъ никакого цѣлаго числа μ, которое удовлетворяло бы неравенствамъ

$$np+p > \mu > np-q.$$

Слѣдовательно въ этомъ случаѣ мы должны положить

$$\mu = np-q$$

и наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E будетъ, кромѣ μ, также и число $\mu+1$, равное $np+p$; такъ какъ при существованіи равенства

$$\mu = np-q$$

должно быть

$$P_{\mu,\,n} = P_{\mu+1,\,p}.$$

Для примѣра положимъ

$$p = \frac{2}{5}$$

и дадимъ n послѣдовательно два значенія:

$$n = 4,\ n = 5.$$

При $n = 4$ сумма $np + p$ обращается въ цѣлое число 2 и потому мы должны имѣть не одно наивѣроятнѣйшее число появленій событія E, а два такихъ числа, одинаково вѣроятныя: $np + p = 2$ и $np - q = 1$.

И дѣйствительно имѣемъ

$$P_{0,4} = \frac{81}{625},\quad P_{1,4} = P_{2,4} = \frac{216}{625},\quad P_{3,4} = \frac{96}{625},\quad P_{4,4} = \frac{16}{625}.$$

При $n=5$ сумма $np+p$ принимаетъ дробное значеніе $2 + \frac{2}{5}$ и цѣлое число μ, опредѣляемое неравенствами

$$np + p = 2 + \frac{2}{5} > \mu > np - q = 2 - \frac{3}{5},$$

равно 2.

Соотвѣтственно этому наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E при $n = 5$ должно быть 2; и дѣйствительно имѣемъ

$$P_{0,5} = \frac{243}{3125},\quad P_{1,5} = \frac{810}{3125},\quad P_{2,5} = \frac{1080}{3125},\quad P_{3,5} = \frac{720}{3125},$$

$$P_{4,5} = \frac{240}{3125},\quad P_{5,5} = \frac{32}{3125}.$$

§ 8. Въ дальнѣйшихъ выводахъ мы будемъ предполагать число p постояннымъ, а n перемѣннымъ, которое можно увеличивать безпредѣльно.

И прежде всего замѣтимъ, что при такомъ предположеніи отношеніе наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія E къ соотвѣтствующему числу испытаній должно приближаться къ предѣлу p, когда число испытаній n возрастаетъ безпредѣльно.

Въ самомъ дѣлѣ, наивѣроятнѣйшее число появленій события E при n испытаніяхъ, по доказанному, не меньше $np - q$ и не больше $np + p$.

Поэтому его отношеніе къ числу испытаній не меньше $p - \frac{q}{n}$ и не больше $p + \frac{p}{n}$.

Числа же

$$p - \frac{q}{n} \text{ и } p + \frac{p}{n}$$

оба приближаются къ одному и тому же предѣлу p, когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Слѣдовательно, при безпредѣльномъ возрастаніи числа испытаній, отношеніе наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія E къ числу испытаній должно приближаться къ тому же предѣлу p.

Полученный нами выводъ относительно наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія E не можетъ служить, отдѣльно взятый, основаніемъ для серьезныхъ заключеній о томъ, чего должно ожидать при многократномъ повтореніи испытаній; такъ какъ вѣроятность, что число появленій событія E точно равно своей наивѣроятнѣйшей величинѣ μ или $\mu + 1$, приближается къ предѣлу нуль, когда число испытаній возрастаетъ безпредѣльно.

Разсматривая же вмѣстѣ съ наивѣроятнѣйшимъ и смежныя значенія числа появленій событія E и изслѣдуя ихъ вѣроятности, мы установимъ весьма важную *теорему Якова Бернулли.*

Теорема Бернулли. *Если имѣемъ неограниченный рядъ независимыхъ испытаній и для всѣхъ ихъ, въ отдѣльности, вѣроятность нѣкотораго событія E одинакова; то при достаточно большомъ числѣ этихъ испытаній будетъ сколь угодно близка къ единицѣ, т. е. къ достовѣрности, вѣроятность, что отношеніе числа появленій событія E къ числу испытаній сколь угодно мало отличается отъ вѣроятности событія E для каждаго изъ нихъ въ отдѣльности.*

Иначе сказать, если p означаетъ вѣроятность событія E для каждаго испытанія, n число ихъ и m число появленій событія E; то при достаточно большихъ значеніяхъ n вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon$$

будетъ больше $1-\eta$, каковы бы ни были данныя положительныя числа ε и η.

Извѣстно нѣсколько доказательствъ теоремы Бернулли.

Одно изъ нихъ принадлежитъ самому Якову Бернулли и изложено въ его сочиненіи «Ars conjectandi», которое издано въ 1713 г., послѣ смерти Якова Бернулли, его племянникомъ Николаемъ Бернулли.

Мы не остановимся на этомъ замѣчательномъ элементарномъ, но довольно сложномъ доказательствѣ; и приведемъ здѣсь, съ небольшими измѣненіями, доказательство Лапласа, которое соединено съ выводомъ весьма употребительной приближенной формулы.

Выводя эту приближенную формулу мы установимъ теорему о предѣлѣ вѣроятностей, которую назовемъ *теоремой Лапласа.*

§ 9. Теорема Лапласа.

Пусть n означаетъ число независимыхъ испытаній, p вѣроятность событія E для каждаго изъ нихъ, $q=1-p$ вѣроятность противоположнаго событія, m число появленій событія E при всѣхъ этихъ испытаніяхъ, наконецъ t_1 и t_2 какія нибудь два числа, при чемъ для опредѣленности положимъ $t_2>t_1$.

Если p, t_1 и t_2 остаются безъ измѣненія, а n возрастаетъ безпредѣльно, то вѣроятность выполненія неравенствъ

$$np+t_1\sqrt{2npq}<m<np+t_2\sqrt{2npq}$$

приближается къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt.$$

Доказательство теоремы Лапласа.

Вѣроятность выполненія неравенствъ

$$np+t_1\sqrt{2npq}<m<np+t_2\sqrt{2npq}$$

ничто иное какъ вѣроятность, что число появленій событія имѣетъ

одно изъ значеній, лежащихъ въ промежуткѣ

$$\text{отъ } np + t_1\sqrt{2npq} \text{ до } np + t_2\sqrt{2npq}.$$

Поэтому ея вычисленіе, въ силу теоремы сложенія вѣроятностей, сводится къ опредѣленію всѣхъ возможныхъ значеній цѣлаго числа m, лежащихъ въ указанномъ промежуткѣ, затѣмъ къ вычисленію для каждаго изъ этихъ значеній m соотвѣтствующей вѣроятности, что число появленій событія E имѣетъ именно такое значеніе, и наконецъ къ сложенію всѣхъ этихъ вѣроятностей.

Съ другой стороны мы знаемъ, что вѣроятность каждаго опредѣленнаго значенія m выражается, согласно формулѣ (4), произведеніемъ

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\,p^m q^{n-m}.$$

Слѣдовательно, обозначивъ вѣроятность неравенствъ

$$np + t_1\sqrt{2npq} < m < np + t_2\sqrt{2npq}$$

символомъ

$$\underset{np+t_1\sqrt{2npq}}{\overset{np+t_2\sqrt{2npq}}{Q}}$$

имѣемъ

$$\underset{np+t_1\sqrt{2npq}}{\overset{np+t_2\sqrt{2npq}}{Q}} = \Sigma P_{m,\,n},$$

гдѣ

$$P_{m,\,n} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\,p^m q^{n-m}$$

а суммированіе Σ распространяется на всѣ значенія цѣлаго числа m, удовлетворяющія неравенствамъ

$$np + t_1\sqrt{2npq} < m < np + t_2\sqrt{2npq}.$$

Приступая къ разсмотрѣнію суммы

$$\Sigma P_{m,\,n},$$

положимъ

$$m = np + z\sqrt{2npq}$$

и такимъ образомъ введемъ вмѣсто цѣлаго числа m новое перемѣнное z, которое ограничено неравенствами

$$t_1 < z < t_2$$

и условіемъ, что $np + z\sqrt{2npq}$ должно быть числомъ цѣлымъ.

При безпредѣльномъ возрастаніи n всѣ значенія m, на которыя распространяется разсматриваемая нами сумма, возрастаютъ безпредѣльно вмѣстѣ съ соотвѣтствующими величинами

$$n - m = nq - z\sqrt{2npq}.$$

Поэтому при отысканіи предѣла суммы

$$\Sigma P_{m,\,n}$$

мы можемъ къ каждому изъ трехъ произведеній

$$1.2\ldots.\,n,\; 1.2\ldots.\,m,\; 1.2\ldots.\,(n-m)$$

примѣнить извѣстную формулу Стирлинга, въ силу которой имѣемъ

$$\text{предѣлъ}\left\{\frac{1.2\ldots.\,x}{\sqrt{2\pi x}\,x^x\,e^{-x}}\right\}_{x=\infty} = 1.$$

Замѣняя въ выраженіи

$$P_{m,\,n} = \frac{1.2\ldots.\,n}{1.2\ldots.\,m.1.2\ldots.\,(n-m)}\,p^m q^{n-m}$$

произведенія

$$1.2\ldots.\,n,\; 1.2\ldots.\,m,\; 1.2\ldots.\,(n-m),$$

согласно формулѣ Стирлинга, произведеніями

$$\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n},\; \sqrt{2\pi m}\,m^m e^{-m},\; \sqrt{2\pi(n-m)}\,(n-m)^{n-m} e^{-n+m}$$

получаемъ новое выраженіе

$$P'_{m,\,n} = \sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi m\,.\,2\pi(n-m)}}\;\frac{n^n e^{-n} p^m q^{n-m}}{m^m e^{-m}(n-m)^{n-m} e^{-n+m}}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$$

и такимъ образомъ приходимъ къ новой суммѣ

$$\Sigma P'_{m,\,n},$$

которая распространяется на тѣже значенія m, какъ и сумма

$$\Sigma P_{m,\,n}.$$

При достаточно большихъ значеніяхъ n всѣ отношенія слагаемыхъ $P_{m,\,n}$ одной суммы къ соотвѣтствующимъ слагаемымъ $P'_{m,\,n}$ другой будутъ сколь угодно близки къ единицѣ.

Слѣдовательно

$$\text{предѣлъ} \left(\frac{\Sigma P_{m,\,n}}{\Sigma P'_{m,\,n}}\right)_{n=\infty} = 1$$

и потому

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Sigma P_{m,\,n} = \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Sigma P'_{m,\,n},$$

если только можно установить существованіе предѣла одной изъ этихъ суммъ, что и будетъ нами выполнено относительно $\Sigma P'_{m,\,n}$.

Выраженіе $P'_{m,\,n}$ можно разсматривать какъ произведеніе двухъ множителей

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m\,(n-m)}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}.$$

Останавливаясь сначала на второмъ изъ этихъ множителей, положимъ

$$\left(\frac{m}{np}\right)^m \left(\frac{n-m}{nq}\right)^{n-m} = W$$

и разсмотримъ $\log W$ съ цѣлью доказать равенство

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ (\log W - z^2) = 0.$$

Въ силу равенствъ

$$m = np + z\sqrt{2npq} \quad \text{и} \quad n - m = nq - z\sqrt{2npq}$$

имѣемъ

$$\frac{m}{np} = 1 + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}} \quad \text{и} \quad \frac{n-m}{nq} = 1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}.$$

Подставляя въ W эти выраженія $\frac{m}{np}$ и $\frac{n-m}{nq}$ черезъ z и принимая во вниманіе, что при достаточно большихъ значеніяхъ n всѣ значенія произведеній

$$\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}} \quad \text{и} \quad \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}$$

будутъ сколь угодно малыми, послѣдовательно получаемъ

$$\log W = m\log\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}}\right)+(n-m)\log\left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}\right)$$

$$=(np+z\sqrt{2npq})\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}}-\frac{qz^2}{np}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{\sqrt{n^3}}\sqrt{\frac{8q^3}{p^3}}-\ldots\right)$$

$$-(nq-z\sqrt{2npq})\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}+\frac{pz^2}{nq}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{\sqrt{n^3}}\sqrt{\frac{8p^3}{q^3}}+\ldots\right)$$

$$=z\sqrt{2npq}-qz^2+2qz^2+\ldots$$

$$-z\sqrt{2npq}-pz^2+2pz^2+\ldots$$

и наконецъ

$$\log W - z^2 = \frac{\alpha z^3}{\sqrt{n}}+\frac{\beta z^4}{n}+\frac{\gamma z^5}{\sqrt{n^3}}+\ldots,$$

такъ какъ

$$-q+2q-p+2p=q+p=1.$$

Не составляя коэффиціентовъ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots$$

намѣченнаго нами разложенія

$$\log W - z^2$$

въ рядъ по степенямъ $\frac{1}{\sqrt{n}}$, мы по одному виду ряда можемъ заключить, что сумма его

$$\frac{\alpha z^2}{\sqrt{n}}+\frac{\beta z^3}{n}+\frac{\gamma z^4}{\sqrt{n^3}}+\ldots$$

должна приближаться къ предѣлу нуль, когда n возрастаетъ безпредѣльно, а z остается въ данномъ промежуткѣ.

Итакъ, при безпредѣльномъ возрастаніи n разность

$$\log W - z^2$$

дѣйствительно приближается къ предѣлу нуль и потому отношеніе

$$\frac{e^{z^2}}{W}$$

приближается къ предѣлу единица.

На этомъ основаніи мы замѣнимъ W на e^{z^2}.

Обращаясь къ другому множителю выраженія $P'_{m,\,n}$, замѣтимъ, что разность каждыхъ двухъ смежныхъ значеній z имѣетъ одну и туже величину, и условимся обозначать ее символомъ Δz.

Величина Δz опредѣляется тѣмъ соображеніемъ, что смежнымъ значеніямъ z должны соотвѣтствовать смежныя же значенія m, которыя отличаются другъ отъ друга на единицу.

Соотвѣтственно этому имѣемъ

$$m = np + z\sqrt{2npq},$$

$$m + 1 = np + (z + \Delta z)\sqrt{2npq},$$

$$m - 1 = np + (z - \Delta z)\sqrt{2npq},$$

и отсюда выводимъ

$$\Delta z = \frac{1}{\sqrt{2npq}}.$$

Разсматривая затѣмъ отношеніе

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} \text{ къ } \sqrt{\frac{n}{2\pi\, m\,(n-m)}}$$

послѣдовательно получаемъ

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} : \sqrt{\frac{n}{2\pi m\,(n-m)}} = \sqrt{\frac{m}{np} \cdot \frac{n-m}{nq}}$$

$$= \left(1 + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и отсюда заключаемъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ

n это отношеніе будетъ сколь угодно близко къ единицѣ, при всѣхъ разсматриваемыхъ нами величинахъ z.

Изъ доказаннаго нами слѣдуетъ, что при разысканіи предѣла суммы

$$\Sigma P'_{m,\,n}$$

мы можемъ вмѣсто

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi\, m\,(n-m)}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$$

соотвѣтственно взять

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и} \quad e^{-z^2}.$$

Мы получимъ такимъ образомъ вмѣсто $P'_{m,\,n}$ новое выраженіе

$$P''_{m,\,n} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}}\, e^{-z^2},$$

отношеніе котораго къ $P'_{m,\,n}$, при достаточно большихъ значеніяхъ n, будетъ сколь угодно близко къ единицѣ для всѣхъ разсматриваемыхъ нами значеній z.

И подобно равенству

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Sigma P_{m,\,n} = \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Sigma P'_{m,\,n}$$

можемъ установить другое

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Sigma P'_{m,\,n} = \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Sigma P''_{m,\,n},$$

при чемъ всѣ суммированія распространяются на одни и тѣже значенія m.

Обращаясь къ суммѣ

$$\Sigma P''_{m,\,n},$$

положимъ, что наименьшимъ возможнымъ значеніемъ z будетъ z_1, а наибольшимъ z_2.

Тогда должно быть

$$z_1 - \Delta z < t_1 < z_1, \quad z_2 < t_2 < z_2 + \Delta z$$

и совокупность разсматриваемыхъ нами значеній z представится арифметическою прогрессіею

$$z_1,\ z_1+\Delta z,\ z_1+2\Delta z,\ldots,\ z_2-\Delta z,\ z_2.$$

При безпредѣльномъ возрастаніи n разность

$$\Delta z=\frac{1}{\sqrt{2npq}},$$

каждыхъ двухъ смежныхъ значеній z, приближается къ предѣлу нуль, равно какъ и разности

$$z_1-t_1 \quad \text{и} \quad t_2-z_2,$$

которыя меньше чѣмъ Δz; такъ что

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Delta z=0,\quad \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ z_1=t_1,\quad \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ z_2=t_2.$$

На этомъ основаніи, въ силу извѣстныхъ предложеній объ опредѣленныхъ интегралахъ, нетрудно заключить, что при безпредѣльномъ возрастаніи n сумма

$$\Sigma P''_{m,\,n},$$

равная

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-z_1^2}+e^{-(z_1+\Delta z)^2}+e^{-(z_1+2\Delta z)^2}+\ldots+e^{-z_2^2}\right],$$

приближается къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2}\,dz;$$

а вмѣстѣ съ нею къ тому же предѣлу должны приближаться и другія двѣ суммы:

$$\Sigma P'_{m,\,n} \quad \text{и} \quad \Sigma P_{m,\,n}.$$

Такимъ образомъ теорема Лапласа доказана.

Принимая же предѣлъ вѣроятности за приближенную ея ве-

личину получаемъ приближенную формулу

$$\overset{np+t_2\sqrt{2npq}}{\underset{np+t_1\sqrt{2npq}}{Q}} \neq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2}\,dz \qquad (6)\ ^{*}).$$

Въ частности при

$$t_1 = -t_2 = t$$

имѣемъ

$$\overset{np+t\sqrt{2npq}}{\underset{np-t\sqrt{2npq}}{Q}} \neq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-z^2}\,dz \qquad (7).$$

Примѣчаніе. Вмѣсто формулы (7) Лапласъ въ своемъ извѣстномъ сочиненіи «Théorie analytique des probabilités» установилъ другую приближенную формулу.

Мы не станемъ выводить здѣсь формулы Лапласа, хотя въ извѣстныхъ случаяхъ она даетъ возможность вычислить вѣроятность значительно точнѣе, чѣмъ то можно сдѣлать по формуламъ (6) и (7).

Мы не станемъ также заниматься оцѣнкою погрѣшности приближенныхъ формулъ (6) и (7).

§ 10. **Доказательство теоремы Бернулли.**

Задавъ по произволу два положительныхъ числа ε и η, покажемъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ n вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

больше $1-\eta$.

Для этой цѣли станемъ, при нѣкоторой величинѣ t, разсматривать вѣроятность неравенствъ

$$np - t\sqrt{2npq} < m < np + t\sqrt{2npq}$$

равносильныхъ неравенствамъ

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}.$$

*) Для отличія приближенныхъ равенствъ отъ точныхъ мы перечеркиваемъ обыкновенный знакъ равенства.

По доказанному эта вѣроятность

$$\underset{np + t\sqrt{2npq}}{\overset{np - t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

должна приближаться къ предѣлу

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2}\, dz,$$

если t остается безъ измѣненія, а n возрастаетъ безпредѣльно.

Съ другой стороны извѣстно равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

которое показываетъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ t разность

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2}\, dz$$

будетъ сколь угодно мало.

Поэтому, разбивъ η на два положительныхъ слагаемыхъ η' и η'', т. е. положивъ

$$\eta = \eta' + \eta'' \quad \text{при} \quad \eta' > 0 \quad \text{и} \quad \eta'' > 0,$$

мы можемъ распорядиться числомъ t такъ, что будетъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2}\, dz = 1 - \eta'$$

и затѣмъ назначить число n_0 настолько большимъ, чтобы для всѣхъ значеній n, удовлетворяющихъ неравенству $n > n_0$, разность

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2}\, dz - \underset{np - t\sqrt{2npq}}{\overset{np + t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

была меньше η''.

Придавъ такимъ образомъ числу t опредѣленное значеніе, установимъ кромѣ неравенства

$$n > n_0$$

еще слѣдующее

$$n > \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2}.$$

Тогда вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon$$

будетъ больше вѣроятности неравенствъ

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

такъ какъ

$$\varepsilon > \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}$$

и потому всѣ значенія m, удовлетворяющія неравенствамъ

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

удовлетворяютъ и неравенствамъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon.$$

Вѣроятность же неравенствъ

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

обозначенная символомъ

$$\overset{np+t\sqrt{2npq}}{\underset{np-t\sqrt{2npq}}{Q}},$$

больше

$$1 - \eta' - \eta'' = 1 - \eta.$$

Слѣдовательно при всѣхъ значеніяхъ n, превосходящихъ

$$n_0 \text{ и } \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2},$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon$$

больше

$$1 - \eta.$$

Такимъ образомъ теорема Бернулли доказана.

Примѣчаніе. Изложенное нами доказательство теоремы Бернулли основано, между прочимъ, на существованіи такого числа n_0, что при всѣхъ, превосходящихъ его, значеніяхъ n разность

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt - \overset{np + t\sqrt{2npq}}{\underset{np - t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

меньше выбраннаго нами числа η''.

Существованіе числа n_0 установлено теоремою Лапласа о предѣлѣ вѣроятности.

Но мы не можемъ придать этому числу опредѣленнаго значенія, пока погрѣшность приближенныхъ формулъ (6) и (7) остается неизслѣдованной.

§ 11. Изъ теоремы Бернулли обыкновенно заключаютъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи числа испытаній отношеніе числа появленій событія къ числу испытаній приближается къ вѣроятности событія при отдѣльныхъ испытаніяхъ.

Подобное заключеніе нельзя однако признать безусловно правильнымъ не только для тѣхъ случаевъ, когда условія теоремы Бернулли не выполнены, но и для тѣхъ случаевъ, къ которымъ эта теорема вполнѣ примѣнима.

Условія теоремы Бернулли состоятъ въ независимости испытаній и въ постоянствѣ величины вѣроятности событія.

При этихъ условіяхъ и при введенныхъ нами обозначеніяхъ, теорема Бернулли обнаруживаетъ невѣроятность значительныхъ отклоненій отношенія $\frac{m}{n}$ отъ p, при большихъ n.

Но она не устраняетъ окончательно возможности такихъ отклоненій; и эти невѣроятныя отклоненія могутъ оказаться дѣйствительными.

Считаемъ полезнымъ замѣтить также, что изъ теоремы Бернулли нельзя выводить необходимости компенсаціи результатовъ однихъ испытаній результатами другихъ.

Именно, если для наблюденныхъ нами испытаній отношеніе числа появленій событія къ числу испытаній значительно отклоняется отъ величины вѣроятности событія, то отсюда нельзя заключать, что для послѣдующихъ испытаній подобное же отношеніе отклонится отъ той же вѣроятности въ другую сторону.

Такое заключеніе противорѣчило бы предположенію о независимости испытаній другъ отъ друга.

Въ силу этой независимости, каковы бы ни были извѣстные намъ результаты однихъ испытаній, они не могутъ измѣнить нашихъ заключеній о возможныхъ результатахъ другихъ испытаній.

Напримѣръ, если вѣроятность событія равна $\frac{1}{2}$ и при двадцати испытаніяхъ оно не появилось ни разу, то при двадцать первомъ испытаніи мы имѣемъ одинаковое основаніе какъ ожидать такъ и не ожидать появленія этого событія до тѣхъ поръ, пока нѣтъ сомнѣнія въ независимости этихъ испытаній и въ правильности принятой нами величины вѣроятности $\frac{1}{2}$.

ГЛАВА III.

О суммѣ независимыхъ величинъ.

§ 12. Приступая къ важнымъ обобщеніямъ предыдущихъ выводовъ, мы должны ввести новыя опредѣленія и понятія.

Положимъ, что значеніе нѣкоторой величины X совпадаетъ съ однимъ изъ чиселъ опредѣленной системы и что каждому числу этой системы соотвѣтствуетъ опредѣленная вѣроятность его совпаденія со значеніемъ X.

Пусть именно

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_\lambda, \ldots,\ x_l$$

всѣ возможныя значенія X и

$$p_1,\ p_2, \ldots,\ p_\lambda, \ldots,\ p_l$$

ихъ вѣроятности; такъ что p_λ представляетъ вѣроятность, что X имѣетъ значеніе x_λ.

При такихъ предположеніяхъ и обозначеніяхъ мы будемъ называть *математическимъ ожиданіемъ* величины X сумму

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_\lambda x_\lambda + \ldots + p_l x_l.$$

Итакъ математическимъ ожиданіемъ величины мы называемъ сумму произведеній каждаго изъ возможныхъ ея значеній на соотвѣтствующую вѣроятность.

При установленіи этого опредѣленія можно предполагать, что всѣ возможныя значенія X различны другъ отъ друга.

Нетрудно однако замѣтить, что такое предположеніе можетъ быть замѣнено другимъ болѣе общаго характера; такъ какъ ничто не мѣшаетъ намъ каждый случай, которому соотвѣтствуетъ то или другое опредѣленное значеніе X, разбить на нѣсколько несовмѣстныхъ между собой случаевъ, отличающихся другъ отъ друга не величиною X, а другими обстоятельствами.

Поэтому, опредѣляя математическое ожиданіе X какъ сумму

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_l x_l$$

произведеній каждаго изъ возможныхъ значеній X на его вѣроятность, мы должны предполагать только, что эти значенія опредѣляются единственно возможными и несовмѣстными случаями; такъ что каждому числу x_λ системы

$$x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_l$$

соотвѣтствуетъ свой особый случай, вѣроятность котораго p_λ мы называемъ вѣроятностью значенія x_λ.

Это простое замѣчаніе послужитъ впослѣдствіи для сокращенія вычисленій.

Для примѣра положимъ, что мы бросаемъ на горизонтальную плоскость двѣ шестигранныя кости и разсматриваемъ сумму вскрывшихся нумеровъ.

Назвавъ одну кость первою, а другую второю и обозначивъ буквою Y вскрывшійся нумеръ первой кости, буквою Z вскрывшійся нумеръ второй кости и буквою X разсматриваемую нами сумму $Y+Z$, мы можемъ различить 36 единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ случаевъ, которые ясно представлены въ таблицѣ:

$X=1+1=2$, $X=1+2=3$, $X=1+3=4$, $X=1+4=5$, $X=1+5=6$, $X=1+6=7$,
$X=2+1=3$, $X=2+2=4$, $X=2+3=5$, $X=2+4=6$, $X=2+5=7$, $X=2+6=8$,
$X=3+1=4$, $X=3+2=5$, $X=3+3=6$, $X=3+4=7$, $X=3+5=8$, $X=3+6=9$,
$X=4+1=5$, $X=4+2=6$, $X=4+2=7$, $X=4+4=8$, $X=4+5=9$, $X=4+6=10$,
$X=5+1=6$, $X=5+2=7$, $X=5+3=8$, $X=5+4=9$, $X=5+5=10$, $X=5+6=11$,
$X=6+1=7$, $X=6+2=8$, $X=6+3=9$, $X=6+4=10$, $X=6+5=11$, $X=6+6=12$.

Такъ какъ всѣ эти случаи равновозможны, то вѣроятность каждаго изъ нихъ равна $\frac{1}{36}$ и математическое ожиданіе разсматриваемой суммы

$$Y+Z$$

выражается, согласно опредѣленію, суммою

$$\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}$$
$$+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}$$
$$+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}$$
$$+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}$$
$$+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}$$
$$+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}+\frac{12}{36},$$

которая равна 7.

Вмѣсто 36 равновозможныхъ случаевъ мы можемъ различить, по величинѣ разсматриваемой суммы, 11 случаевъ:

$$X=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,$$

которымъ соотвѣтствуютъ такія вѣроятности

$$\frac{1}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{4}{36},\ \frac{5}{36},\ \frac{6}{36},\ \frac{5}{36},\ \frac{4}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{1}{36}.$$

Опредѣляя на этомъ основаніи математическое ожиданіе X, получаемъ то же число 7 подъ видомъ суммы

$$\frac{2}{36}+\frac{2.3}{36}+\frac{3.4}{36}+\frac{4.5}{36}+\frac{5.6}{36}+\frac{6.7}{36}+\frac{5.8}{36}+\frac{4.9}{36}+\frac{3.10}{36}+\frac{2.11}{36}+\frac{12}{36}.$$

Намъ придется разсматривать не одну величину X, а нѣсколько подобныхъ величинъ, при чемъ для большей ясности мы будемъ предполагать, что для каждой изъ нихъ совокупность

возможныхъ ея значеній состоитъ изъ конечнаго числа различныхъ чиселъ.

Подобно тому, какъ раньше важно было установить понятіе о независимыхъ событіяхъ и независимыхъ испытаніяхъ, такъ теперь важно установить понятіе *о независимыхъ величинахъ*.

Нѣсколько величинъ

$$X, \ Y, \ Z, \ldots, \ W$$

мы будемъ называть независимыми, если для каждой изъ нихъ вѣроятность имѣть каждое опредѣленное значеніе не зависитъ отъ значенія прочихъ величинъ.

Останавливаясь на случаѣ двухъ величинъ положимъ, что

$$x_1, \ x_2, \ldots, \ x_\lambda, \ldots, \ x_l$$

всѣ возможныя, различныя между собой, значенія X, а

$$y_1, \ y_2, \ldots, \ y_\mu, \ldots, \ y_m$$

всѣ возможныя, различныя между собой, значенія Y.

Если величины X и Y не зависятъ другъ отъ друга, то каждому числу x_λ системы

$$x_1, \ x_2, \ldots, \ x_\lambda, \ldots, \ x_l$$

должно соотвѣтствовать опредѣленное число p_λ, представляющее вѣроятность, что X равно x_λ, каково бы ни было извѣстное или неизвѣстное значеніе Y; и каждому числу y_μ системы

$$y_1, \ y_2, \ldots, \ y_m$$

должно соотвѣтствовать опредѣленное число q_μ, представляющее вѣроятность, что Y равно y_μ, каково бы ни было извѣстное или неизвѣстное значеніе X.

Примѣчаніе 1. Во избѣжаніе недоразумѣній замѣтимъ, что изъ независимости величинъ X и Y не вытекаетъ независимость X и какой нибудь функціи обѣихъ величинъ X и Y, напримѣръ $X + Y$.

Для поясненія положимъ, что каждая изъ независимыхъ величинъ X и Y можетъ имѣть два равновѣроятныхъ значенія:

$$-1 \text{ и } +1.$$

Тогда сумма

$$X+Y$$

можетъ имѣть три различныхъ значенія:

$$-2,\ 0,\ +2,$$

вѣроятности которыхъ представляются дробями

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},$$

пока значенія X и Y остаются неизвѣстными.

Если же при неизвѣстномъ значеніи Y дано значеніе X, то изъ трехъ значеній суммы $X+Y$ остаются только два и эти два равновѣроятны.

При $X=+1$ сумма $X+Y$ не можетъ имѣть значенія -2, другія же два возможныя ея значенія, 0 и $+2$, равновѣроятны; а при $X=-1$ сумма $X+Y$ не можетъ имѣть значенія $+2$, другія же два возможныя ея значенія, -2 и 0, равновѣроятны.

Примѣчаніе 2. Замѣтимъ также, что независимость величинъ можетъ быть обусловлена тѣми данными, при которыхъ разсматриваются вѣроятности ихъ возможныхъ значеній; такъ что при измѣненіи данныхъ зависимыя величины могутъ сдѣлаться независимыми и обратно.

Для поясненія этого замѣчанія можно было бы составить примѣръ подобный тому, какимъ мы пояснили вліяніе данныхъ на зависимость и независимость событій.

Но мы предпочитаемъ привести примѣръ другого рода, который покажетъ также, что независимость нѣсколькихъ величинъ не равносильна независимости каждыхъ двухъ изъ нихъ

Пусть будутъ

$$X,\ Y,\ Z$$

три числа, связанныя равенствомъ

$$XY = Z.$$

Положимъ далѣе, что

$$X \text{ и } Y$$

не зависятъ другъ отъ друга, пока Z остается неопредѣленнымъ, и что для каждой изъ этихъ величинъ представляется два и только два равновозможныхъ значенія: $+1$ и -1.

Въ этомъ случаѣ независимыя величины X и Y перестанутъ быть независимыми, какъ только будетъ опредѣлено значеніе Z: при $Z = +1$ должно быть $X = Y$, а при $Z = -1$ должно быть $X + Y = 0$.

Нетрудно видѣть также, что при неопредѣленномъ значеніи X величины Y и Z будутъ независимыми, а при неопредѣленномъ значеніи Y будутъ независимыми X и Z.

Итакъ, если ни одна изъ величинъ

$$X, Y, Z$$

не опредѣлена, то каждыя двѣ изъ нихъ не зависятъ другъ отъ друга; разсматриваемыя же вмѣстѣ

$$X, Y, Z$$

не представляютъ трехъ независимыхъ величинъ, такъ какъ онѣ связаны равенствомъ

$$Z = XY.$$

§ 13. Важное значеніе математическаго ожиданія обнаружится при разсмотрѣніи суммы многихъ независимыхъ величинъ.

Предварительно мы докажемъ нѣсколько простыхъ предложеній.

Теорема. *Математическое ожиданіе суммы равно суммѣ математическихъ ожиданій слагаемыхъ.*

Эта теорема относится къ какимъ угодно величинамъ, какъ къ независимымъ, такъ и къ зависимымъ.

Для доказательства ея положимъ, что значенія какихъ нибудь величинъ

$$X, Y, Z, \ldots, W$$

опредѣляются единственно возможными и несовмѣстными случаями

$$E_1, E_2, \ldots, E_n.$$

Пусть вѣроятности этихъ случаевъ соотвѣтственно будутъ

$$p_1, p_2, \ldots, p_n;$$

пусть наконецъ система

$$x_k, y_k, z_k, \ldots, w_k$$

представляетъ значенія

$$X, Y, Z, \ldots, W$$

для случая E_k; такъ что

$$X, Y, Z, \ldots, W$$

принимаютъ соотвѣтственно значенія

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, w_1,$$

если появляется E_1, значенія

$$x_2, y_2, z_2, \ldots, w_2,$$

если появляется E_2, и т. д.

При такихъ условіяхъ и обозначеніяхъ математическія ожиданія величинъ

$$X, Y, \ldots, W$$

выражаются соотвѣтственно суммами

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n, \; p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n,$$

$$\ldots\ldots, \; p_1 w_1 + p_2 w_2 + \ldots + p_n w_n.$$

Затѣмъ относительно суммы

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

замѣчаемъ, что сообразно появленію событій

$$E_1,\ E_2,\ldots,\ E_n$$

она принимаетъ значенія

$$x_1+y_1+\ldots+w_1,\ x_2+y_2+\ldots+w_2,\ldots,\ x_n+y_n+\ldots+w_n.$$

Поэтому ея математическое ожиданіе выражается суммою

$$p_1(x_1+y_1+\ldots+w_1)+p_2(x_2+y_2+\ldots+w_2)+\ldots+$$
$$+p_n(x_n+y_n+\ldots+w_n),$$

которая, очевидно, равна суммѣ

$$(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)+(p_1y_1+p_2y_2+\ldots+p_ny_n)+$$
$$+\ldots+(p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_nw_n).$$

Итакъ, математическое ожиданіе суммы

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

равно суммѣ математическихъ ожиданій слагаемыхъ

$$X,\ Y,\ Z,\ldots,\ W.$$

Употребляя для обозначенія математическаго ожиданія буквы м. о., можемъ выразить установленную теорему формулою

м. о. $(X+Y+\ldots+W)=$ м. о. $X+$ м. о. $Y+\ldots+$ м. о. W (8).

Примѣръ примѣненія этой теоремы можетъ доставить разсмотрѣнная раньше сумма

$$X+Y$$

вскрывшихся нумеровъ двухъ, брошенныхъ на удачу, шестигранныхъ костей съ нумерами

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Въ данномъ случаѣ математическое ожиданіе каждой изъ величинъ

$$X \text{ и } Y$$

равно

$$1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2},$$

и потому математическое ожиданіе ихъ суммы

$$X+Y$$

должно приводиться къ 7, какъ и было найдено раньше.

Теорема. *Математическое ожиданіе произведенія независимыхъ величинъ равно произведенію ихъ математическихъ ожиданій.*

Эта теорема относится къ произведенію любого числа независимыхъ величинъ.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ произведенія двухъ множителей, такъ какъ отъ произведенія двухъ множителей нетрудно перейти къ произведенію любого числа множителей, посредствомъ послѣдовательнаго прибавленія одного множителя за другимъ.

Пусть система

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_\lambda,\ldots,\ x_l$$

представляетъ всѣ возможныя различныя значенія величины X, а система

$$y_1,\ y_2,\ldots,\ y_\mu,\ldots,\ y_m$$

представляетъ всѣ возможныя различныя значенія величины Y.

Если X и Y, какъ мы предполагаемъ, не зависятъ другъ отъ друга, то должны быть еще двѣ опредѣленныя системы чиселъ

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_\lambda,\ldots,\ p_l$$

и

$$q_1,\ q_2,\ldots,\ q_\mu,\ldots,\ q_m,$$

гдѣ вообще p_λ представляетъ вѣроятность величинѣ X имѣть значеніе x_λ, какъ при извѣстномъ, такъ и при неизвѣстномъ значеніи Y, число же q_μ представляетъ вѣроятность величинѣ Y

имѣть значеніе y_μ, какъ при извѣстномъ, такъ и при неизвѣстномъ значеніи X.

Затѣмъ сумма

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots . + p_\lambda x_\lambda + \ldots . + p_l x_l$$

будетъ математическимъ ожиданіемъ X, а сумма

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots . + q_\mu y_\mu + \ldots . + q_m y_m$$

будетъ математическимъ ожиданіемъ Y.

Приступая же къ опредѣленію математическаго ожиданія XY, мы можемъ различить lm единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ случаевъ, каждый изъ которыхъ опредѣляется совокупностью значеній обѣихъ величинъ X и Y.

Слѣдующая таблица представляетъ наглядное перечисленіе этихъ случаевъ

$X=x_1,\ Y=y_1$	$X=x_2,\ Y=y_1$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_1$	...	$X=x_l,\ Y=y_1$
$X=x_1,\ Y=y_2$	$X=x_2,\ Y=y_2$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_2$	...	$X=x_l,\ Y=y_2$
. . . .		...		...	. . . .
. . . .		...		...	. . . .
$X=x_1,\ Y=y_\mu$	$X=x_2,\ Y=y_\mu$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_\mu$	...	$X=x_l,\ Y=y_\mu$
. . . .		...		...	. . . .
. . . .		...		...	. . . .
$X=x_1,\ Y=y_m$	$X=x_2,\ Y=y_m$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_m$	...	$X=x_l,\ Y=y_m$.

Возьмемъ любой изъ этихъ случаевъ:

$$X = x_\lambda,\quad Y = y_\mu.$$

Его вѣроятность равна

$$p_\lambda q_\mu,$$

по теоремѣ умноженія вѣроятностей; произведеніе же

$$XY$$

принимаетъ въ этомъ случаѣ значеніе

$$x_\lambda \, y_\mu.$$

Поэтому, согласно опредѣленію, математическое ожиданіе произведенія XY можетъ быть выражено суммою всѣхъ произведеній

$$p_\lambda \, q_\mu \, x_\lambda \, x_\mu ,$$

гдѣ

$$\lambda = 1, 2, \ldots, l \text{ и } \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Соединяя въ этой суммѣ тѣ слагаемыя, гдѣ λ имѣетъ одно и тоже значеніе, можемъ разбить ее на l отдѣльныхъ суммъ вида

$$p_\lambda \, q_1 \, x_\lambda \, y_1 + p_\lambda \, q_2 \, x_\lambda \, y_2 + \ldots + p_\lambda \, q_m \, x_\lambda \, y_m ,$$

для полученія которыхъ надо давать λ значенія

$$1, 2, \ldots, l.$$

Сумма же

$$p_\lambda \, q_1 \, x_\lambda \, y_1 + p_\lambda \, q_2 \, x_\lambda \, y_2 + \ldots + p_\lambda \, q_m \, x_\lambda \, y_m ,$$

очевидно, равна произведенію $p_\lambda \, x_\lambda$ на сумму

$$q_1 \, y_1 + q_2 \, y_2 + \ldots + q_m \, y_m ,$$

представляющую математическое ожиданіе Y.

Слѣдовательно разсматриваемое нами математическое ожиданіе равно суммѣ

$$\begin{aligned} & p_1 \, x_1 \, (q_1 \, y_1 + q_2 \, y_2 + \ldots + q_m \, y_m) \\ + & p_2 \, x_2 \, (q_1 \, y_1 + q_2 \, y_2 + \ldots + q_m \, y_m) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & p_l \, x_l \, (q_1 \, y_1 + q_2 \, y_2 + \ldots + q_m \, y_m), \end{aligned}$$

которая тотчасъ приводится къ произведенію двухъ суммъ

$$p_1 \, x_1 + p_2 \, x_2 + \ldots + p_l \, x_l \text{ и } q_1 \, y_1 + q_2 \, y_2 + \ldots + q_m \, y_m ,$$

соотвѣтственно равныхъ математическому ожиданію X и математическому ожиданію Y.

Итакъ математическое ожиданіе произведенія двухъ независимыхъ величинъ равно произведенію ихъ математическихъ ожиданій:

$$\text{м. о. } XY = \text{м. о. } X \times \text{м. о. } Y \qquad (9).$$

Отсюда уже не трудно заключить для любого числа независимыхъ величинъ, что математическое ожиданіе ихъ произведенія равно произведенію математическихъ ожиданій этихъ величинъ.

Въ частности, математическое ожиданіе произведенія независимыхъ величинъ должно приводиться къ нулю, если равно нулю математическое ожиданіе одной, или нѣкоторыхъ, изъ нихъ.

Лемма. *Если A означаетъ математическое ожиданіе величины U, всѣ значенія которой числа положительныя, а t число произвольное; то вѣроятность неравенства*

$$U \leqq At^2$$

больше

$$1 - \frac{1}{t^2}.$$

Доказательство.

Пусть два ряда чиселъ

$$u_1, \; u_2, \ldots, \; u_\sigma, \ldots, \; u_s$$

и

$$\omega_1, \; \omega_2, \ldots, \; \omega_\sigma, \ldots, \; \omega_s$$

представляютъ соотвѣтственно совокупность всѣхъ возможныхъ значеній U и вѣроятности этихъ значеній; такъ что вѣроятность величинѣ U имѣть значеніе u_σ равна ω_σ.

Одни изъ чиселъ

$$u_1, \; u_2, \ldots, \; u_s$$

больше At^2, другія меньше At^2 или равны этому числу.

Для опредѣленности положимъ, что числа

$$u_1, \; u_2, \ldots, \; u_l$$

не больше At^2, остальныя же

$$u_{i+1},\ u_{i+2}, \ldots, u_s$$

больше At^2.

Тогда вѣроятность неравенства

$$U \leqq At^2$$

выразится суммою

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_i,$$

согласно теоремѣ сложенія вѣроятностей; такъ какъ событіе, выражаемое этимъ неравенствомъ, можно разбить на несовмѣстные виды, выражаемые равенствами

$$U = u_1,\ U = u_2, \ldots, U = u_i.$$

Согласно той же теоремѣ сложенія вѣроятностей сумма

$$\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s$$

представитъ вѣроятность неравенства

$$U > At^2.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$A = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \ldots + \omega_i u_i + \omega_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \omega_s u_s$$

и

$$1 = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_i + \omega_{i+1} + \ldots + \omega_s,$$

такъ какъ, во первыхъ, буквою A мы обозначили математическое ожиданіе величины U и, вовторыхъ, сумма вѣроятностей событій, единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ, должна приводиться къ единицѣ.

Принимая же во вниманіе, что между значеніями U, какъ и между числами

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots, \omega_s,$$

нѣтъ отрицательныхъ чиселъ, согласно одному изъ условій леммы, и что всѣ числа

$$u_{i+1},\ u_{i+2}, \ldots, u_s$$

больше At^2, изъ равенства

$$A = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \ldots + \omega_i u_i + \omega_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \omega_s u_s$$

выводимъ послѣдовательно неравенства

$$A > \omega_{i+1} u_{i+1} + \omega_{i+2} u_{i+2} + \ldots + \omega_s u_s,$$

$$A > At^2 (\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s)$$

и наконецъ

$$\frac{1}{t^2} > \omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s.$$

Послѣднее неравенство показываетъ, что вѣроятность неравенства

$$U > At^2,$$

выражаемая суммою

$$\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s,$$

меньше $\frac{1}{t^2}$.

Слѣдовательно вѣроятность неравенства

$$U \leqq At^2$$

больше

$$1 - \frac{1}{t^2},$$

ибо эта послѣдняя вѣроятность выражается суммою

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_i,$$

которая равна

$$1 - (\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s).$$

Основываясь на доказанной леммѣ, нетрудно установить слѣдующее замѣчательное неравенство Чебышева.

Неравенство Чебышева.

Если для какихъ нибудь независимыхъ величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W$$

мы обозначимъ, соотвѣтственно, ихъ математическія ожиданія буквами

$$a,\ b,\ c, \ldots,\ l$$

и математическія ожиданія ихъ квадратовъ тѣми же буквами со значкомъ $_1$, *т. е. символами*

$$a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots,\ l_1;$$

то при произвольномъ значеніи числа t разность

$$1-\frac{1}{t^2}$$

будетъ меньше вѣроятности, что сумма

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

не выходитъ изъ предѣловъ

$$a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2}$$

и

$$a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2}.$$

Доказательство.

Полагая

$$U=(X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c\ldots-l)^2$$

и обозначивъ буквою A математическое ожиданіе U, мы можемъ, на основаніи только что доказанной леммы, заключить, что при любомъ значеніи числа t разность

$$1-\frac{1}{t^2}$$

меньше вѣроятности неравенства

$$(X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l)^2 \leqq At^2,$$

которое, равносильно совокупности двухъ неравенствъ

$$-t\sqrt{A}\leqq X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l\leqq t\sqrt{A}.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$U=(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2+\ldots+(W-l)^2$$
$$+2(X-a)(Y-b)+2(X-a)(Z-c)+\ldots,$$

откуда выводимъ

$$\text{м. о. } U = A = \text{м. о. } (X-a)^2 + \text{м. о. } (Y-b)^2 + \ldots + \text{м. о. } (W-l)^2$$
$$+ 2\,\text{м. о. } (X-a)(Y-b) + 2\,\text{м. о. } (X-a)(Z-c) + \ldots$$

Разсматривая же въ отдѣльности слагаемыя послѣдней суммы, получаемъ

$$\text{м. о. } (X-a)^2 = \text{м. о. } (X^2 - 2aX + a^2) = \text{м. о. } X^2 - 2a \cdot \text{м. о. } X + a^2$$
$$= a_1 - 2aa + a^2 = a_1 - a^2$$
$$\text{м. о. } (Y-b)^2 = b_1 - b^2, \ldots, \text{ м. о. } (W-l)^2 = l_1 - l^2,$$
$$\text{м. о. } (X-a)(Y-b) = \text{м. о. } (X-a) \times \text{м. о. } (Y-b) = 0,$$
$$\text{м. о. } (X-a)(Z-c) = \text{м. о. } (X-a) \times \text{м. о. } (Z-c) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

такъ какъ величины

$$X-a,\ Y-b,\ Z-c, \ldots, W-l$$

не зависятъ другъ отъ друга и математическія ожиданія ихъ равны нулю.

И на этомъ основаніи находимъ

$$A = \text{м. о. } U = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2.$$

Наконецъ по замѣнѣ A суммою

$$a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2$$

легко обнаружить, что неравенства

$$-t\sqrt{A} < X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c \ldots - l < t\sqrt{A}$$

выполняются въ тѣхъ и только въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

заключается между

$$a + b + c + \ldots + l - t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2}$$

и

$$a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2}.$$

Слѣдовательно вѣроятность, что сумма

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

заключается въ указанныхъ нами предѣлахъ

$$a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2}$$

и

$$a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2},$$

равна вѣроятности неравенства

$$(X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l)^2 \leqq t^2\,(a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2)$$

и больше чѣмъ

$$1-\frac{1}{t^2}\cdot$$

Такимъ образомъ неравенство Чебышева доказано.

§ 14. Обобщенная теорема Бернулли.

Если математическія ожиданія квадратовъ независимыхъ величинъ

$$X,\ Y,\ Z,\ldots,\ W,$$

число которыхъ можно увеличивать безпредѣльно, всѣ не превосходятъ одного и того же числа; то при достаточно большомъ числѣ этихъ величинъ будетъ сколь угодно близкою къ достовѣрности вѣроятность, что ихъ средняя арифметическая отличается произвольно мало отъ средней арифметической ихъ математическихъ ожиданій.

Доказательство.

Сохраняя для математическихъ ожиданій величинъ

$$X,\ Y,\ Z,\ldots,\ W$$

и для математическихъ ожиданій ихъ квадратовъ

$$X^2,\ Y^2,\ Z^2, \ldots,\ W^2$$

прежнія обозначенія

$$a,\ b,\ c, \ldots,\ l$$

и

$$a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots,\ l_1,$$

назовемъ число величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W$$

буквою S; такъ что ихъ средняя ариѳметическая выразится дробью

$$\frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S},$$

средняя же ариѳметическая ихъ математическихъ ожиданій выразится дробью

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S}.$$

Затѣмъ обозначимъ буквою L то число, котораго не превосходятъ математическія ожиданія квадратовъ величинъ $X, Y, Z, \ldots, W$, такъ что

$$a_1 \leqq L,\ b_1 \leqq L,\ c_1 \leqq L, \ldots,\ l_1 \leqq L.$$

Взявъ наконецъ любыя два положительныхъ числа

$$\varepsilon \text{ и } \eta,$$

покажемъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ S вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < \varepsilon$$

будетъ больше

$$1-\eta.$$

Для этой цѣли намъ послужитъ только что установленное неравенство Чебышева.

При

$$t^2 = \frac{1}{\eta}$$

неравенство Чебышева показываетъ, что разность

$$1 - \eta$$

меньше вѣроятности неравенствъ

$$-\sqrt{\frac{A}{\eta}} \leqq X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l \leqq \sqrt{\frac{A}{\eta}},$$

равносильныхъ неравенствамъ

$$\frac{-1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} \leqq \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$

гдѣ

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2.$$

Но каждая изъ разностей

$$a_1 - a^2,\ b_1 - b^2,\ c_1 - c^2, \ldots,\ l_1 - l^2$$

не превосходитъ числа L, поэтому и отношеніе

$$\frac{A}{S}$$

не превосходитъ того же числа L, произведеніе же

$$\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}}$$

не можетъ превосходить

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}}.$$

Слѣдовательно, если распорядимся числомъ S такъ, чтобы было

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}} < \varepsilon,$$

то числа

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \quad \text{и} \quad +\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}}$$

будутъ заключаться между

$$-\varepsilon \text{ и } +\varepsilon$$

и потому во всѣхъ случаяхъ, когда оправдываются неравенства

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} \leqq \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$

будутъ имѣть мѣсто и неравенства

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon.$$

При такихъ условіяхъ вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon$$

будетъ, конечно, не меньше вѣроятности неравенствъ

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$

которая по доказанному больше чѣмъ $1-\eta$.

Итакъ, вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon$$

будетъ больше чѣмъ $1-\eta$ при всѣхъ значеніяхъ S, удовлетворяющихъ неравенству

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}} < \varepsilon,$$

т. е. при

$$S > \frac{L}{\eta\varepsilon^2}.$$

Доказавъ такимъ образомъ обобщенную теорему Бернулли, обратимъ вниманіе на одно важное слѣдствіе ея.

Если математическія ожиданія квадратовъ независимыхъ величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W,$$

число которыхъ можно увеличивать безпредѣльно, всѣ не больше

одного и того же числа, а математическія ожиданія самихъ величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots, \ W,$$

напротивъ, всѣ не меньше одного и того же положительнаго числа; то при достаточно большомъ числѣ этихъ величинъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности мы должны ожидать, что сумма ихъ

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

превзойдетъ любое данное число,

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, кромѣ прежнихъ неравенствъ

$$a_1 \leqq L,\ b_1 \leqq L,\ c_1 \leqq L, \ldots, \ l_1 \leqq L$$

имѣемъ

$$a > C,\ b > C,\ c > C, \ldots, \ l > C,\ C > 0.$$

По доказанному, какія бы два положительныхъ числа ε и η мы ни взяли, при

$$S > \frac{L}{\eta\varepsilon^2}$$

вѣроятность неравенствъ

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S} - \varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} < \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} + \varepsilon$$

будетъ больше $1 - \eta$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, будетъ больше $1 - \eta$ и вѣроятность одного неравенства

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S} - \varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S},$$

которое вполнѣ равносильно слѣдующему

$$X + Y + Z + \ldots + W > a + b + c + \ldots + l - S\varepsilon.$$

Въ силу неравенствъ

$$a > C,\ b > C,\ c > C, \ldots, \ l > C$$

сумма

$$a + b + c + \ldots + l$$

больше SC и потому во всѣхъ случаяхъ, когда оправдывается неравенство

$$X+Y+Z+\ldots+W>a+b+c+\ldots+l-S\varepsilon$$

должно быть также

$$X+Y+Z+\ldots+W>S(C-\varepsilon).$$

Слѣдовательно вѣроятность послѣдняго неравенства также больше $1-\eta$.

Остается принять во вниманіе, что при

$$\varepsilon<C$$

и при достаточно большихъ значеніяхъ S произведеніе

$$S(C-\varepsilon)$$

будетъ больше любого числа, и мы тотчасъ придемъ къ слѣдствію обобщенной теоремы Бернулли, высказанному раньше.

§ 15. Нетрудно показать, что установленная ранѣе теорема Бернулли представляетъ частный случай обобщенной.

Желая предварительно вывести предложеніе извѣстное подъ именемъ *теоремы Пуассона* или *закона большихъ чиселъ*, положимъ, что разсматривается неограниченный рядъ независимыхъ испытаній, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

и что вѣроятности событія E при этихъ испытаніяхъ соотвѣтственно имѣютъ значенія

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots.$$

Далѣе свяжемъ съ разсматриваемыми испытаніями количества

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ldots.$$

такъ, чтобы сумма

$$X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n,$$

при всякомъ n выражала число появленій событія E, при испытаніяхъ съ нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n.$$

Для этого, очевидно, слѣдуетъ для всякаго числа k системы натуральныхъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

положить

$$X_k = 1,$$

если при испытаніи съ нумеромъ k появляется событіе E, и

$$X_k = 0$$

въ противномъ случаѣ.

При такихъ условіяхъ отношеніе

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

представляющее среднюю ариѳметическую величинъ

$$X_1,\ X_2, \ldots, X_n,$$

будетъ совпадать съ отношеніемъ числа появленій событія E, при испытаніяхъ съ нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n,$$

къ числу этихъ испытаній.

Съ другой стороны нетрудно видѣть, что математическія ожиданія

$$X_k \text{ и } X_k^2$$

имѣютъ одно и то же значеніе

$$p_k \cdot 1 + (1 - p_k) \cdot 0 = p_k,$$

которое не больше единицы для всѣхъ значеній k.

Поэтому мы можемъ приложить къ величинамъ

$$X_1,\ X_2, \ldots, X_n$$

обобщенную теорему Бернулли, замѣняя ихъ среднюю арифметическую равною ей величиною отношенія числа появленій событія E къ числу испытаній.

Принимая наконецъ во вниманіе, что средняя арифметическая математическихъ ожиданій величинъ

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$$

равна средней арифметической соотвѣтственныхъ вѣроятностей собыія E, приходимъ къ упомянутой нами *теоремѣ Пуассона*, иначе называемой *закономъ большихъ чиселъ*.

При достаточно большомъ числѣ независимыхъ испытаній слѣдуетъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, ожидать, что отношеніе числа появленій событія къ числу испытаній будетъ сколь угодно близко къ средней арифметической вѣроятностей событія.

И неравенства Чебышева обнаруживаютъ, что при

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2 \eta}$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} < \varepsilon$$

будетъ больше

$$1 - \eta,$$

гдѣ m означаетъ число появленій событія E при разсматриваемыхъ n испытаніяхъ, а ε и η любыя два положительныхъ числа.

Указанный нами предѣлъ для n можно уменьшить еще въ четыре раза, если принять во вниманіе, что ни одна изъ разностей

$$p_1 - p_1^2, \; p_2 - p_2^2, \ldots, \; p_n - p_n^2$$

не больше $\frac{1}{4}$.

Въ частномъ случаѣ, когда всѣ вѣроятности

$$p_1, p_2, p_3, \ldots,$$

имѣютъ одну и ту же величину p, законъ большихъ чиселъ обращается въ теорему Бернулли.

Получивъ такимъ образомъ теорему Бернулли какъ частный случай другихъ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ можемъ установить нижеслѣдующее простое неравенство.

Если n означаетъ число независимыхъ испытаній, p вѣроятность событія E для каждаго испытанія и m число появленій событія E, то вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

будетъ больше

$$1 - \eta$$

при всѣхъ значеніяхъ n превосходящихъ

$$\frac{p - p^2}{\varepsilon^2 \eta} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 \eta}$$

каковы бы ни были положительныя числа ε и η.

Взявъ, напримѣръ,

$$p = \frac{3}{5}, \quad \varepsilon = \frac{1}{50}, \quad \eta = 0{,}001,$$

находимъ, что при

$$n > \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{1}{50}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000}} = 600000$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

будетъ навѣрно больше

$$0{,}999.$$

Найденное нами число

$$600000,$$

конечно, слишкомъ велико; въ дѣйствительности же вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

превосходитъ 0,999 при величинахъ n во много разъ меньшихъ чѣмъ 600000.

Яковъ Бернулли, разсматривая въ Ars conjectandi тотъ же примѣръ, получилъ вмѣсто 600000 число 25550.

Выводъ Бернулли соединенъ съ предположенiемъ, что n дѣлится на 50; не трудно однако устранить это предположенiе и небольшое видоизмѣненiе вычисленiй Бернулли даетъ возможность не только сохранить число 25550 для всѣхъ значенiй n, но и нѣсколько уменьшить его.

Если же мы будемъ считать за истинную величину вѣроятности ея приближенное значенiе, опредѣленное по формулѣ (7), то для разысканiя тѣхъ значенiй n, при которыхъ вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

больше 0,999 надо будетъ поступать слѣдующимъ образомъ.

Посредствомъ таблицы значенiй интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2}\, dz$$

находимъ t по условiю

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2}\, dz = 0{,}999,$$

это значенiе t будетъ

$$2{,}3268$$

съ точностью до $\frac{1}{10000}$.

Затѣмъ разсматриваемъ неравенство

$$t\sqrt{\frac{2pq}{n}} < \varepsilon = \frac{1}{50}$$

и отсюда получаемъ

$$n > \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2} = 1200 \times (2{,}3268)^2 = 6497.$$

Этотъ результатъ не даетъ намъ права утверждать, что при

$$n > 6497$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - p < \frac{1}{50}$$

будетъ навѣрно больше 0,999.

Но онъ можетъ служить указаніемъ, что разсматриваемая нами вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - p < \frac{1}{50}$$

будетъ больше 0,999 уже при величинахъ n незначительно превосходящихъ 6497.

Напримѣръ, при

$$n = 6520$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

дѣйствительно превосходитъ 0,999.

§ 16. Возвращаясь къ суммѣ

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

какихъ нибудь независимыхъ величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W,$$

займемся выводомъ приближеннаго выраженія для вѣроятности, что эта сумма заключается въ предѣлахъ

$$a + b + c + \ldots + l + t\sqrt{2\,(a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2)}$$

и

$$a + b + c + \ldots + l - t\sqrt{2\,(a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2)},$$

гдѣ

$$a, b, c, \ldots, l \quad \text{и} \quad a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots,\ l_1$$

имѣютъ тотъ же смыслъ какъ и прежде, а t число произвольное.

Это замѣчательное выраженіе

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz$$

нами было уже указано при доказательствѣ теоремы Бернулли.

Тогда оно было получено для частнаго случая, соотвѣтствующаго теоремѣ Бернулли; а теперь мы выведемъ тоже приближенное выраженіе вѣроятности для всѣхъ случаевъ.

Обозначимъ для краткости:

всѣ возможныя различныя значенія X одною буквою x,
——————————— Y ——————— y,
——————————— Z ——————— z,
. . . .
——————————— W ——————— w,

а вѣроятности этихъ значеній буквами

$$\rho,\ \sigma,\ \tau,\ldots,\ \omega.$$

Затѣмъ условимся обозначать буквою Σ такія суммы, которыя распространяются на всѣ значенія

$$x,\ y,\ z,\ldots,\ w$$

и соотвѣтствующія имъ величины

$$\rho,\ \sigma,\ \tau,\ldots,\ \omega;$$

для обозначенія же одной суммы, распространенной не на всѣ значенія

$$x,\ y,\ z,\ldots,\ w,$$

употребимъ символъ Σ'.

При такихъ условіяхъ имѣемъ

$$\Sigma\rho=\Sigma\sigma=\Sigma\tau=\ldots=\Sigma\omega=1,$$

$$\Sigma\rho x=a,\ \Sigma\sigma y=b,\ \Sigma\tau z=c,\ldots,\ \Sigma\omega w=l$$

$$\Sigma\rho x^2=a_1,\ \Sigma\sigma y^2=b_1,\ \Sigma\tau z^2=c_1,\ldots,\ \Sigma\omega w^2=l_1,$$

и для каждой возможной системы чиселъ

$$x, y, z, \ldots, w$$

соотвѣтствующее произведеніе

$$\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

будетъ выражать вѣроятность совокупности равенствъ

$$X = x, \ Y = y, \ Z = z, \ldots, \ W = w,$$

въ силу теоремы умноженія вѣроятностей, примѣненной къ независимымъ событіямъ.

И изъ теоремы сложенія вѣроятностей нетрудно заключить, что вѣроятность неравенствъ

$$a + b + \ldots + l - t\sqrt{2A} < X + Y + \ldots + W < a + b + \ldots + l + t\sqrt{2A},$$

гдѣ

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2,$$

представится суммою

$$\Sigma' \rho\sigma\tau \ldots \omega,$$

распространенною на тѣ значенія

$$x, y, z, \ldots, w,$$

которыя удовлетворяютъ неравенствамъ

$$-t\sqrt{2A} < x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l < + t\sqrt{2A}.$$

При помощи замѣчательнаго множителя Дирихле мы сведемъ эту сумму

$$\Sigma' \rho\sigma\tau \ldots \omega$$

къ другой, которая распространяется уже на всѣ значенія

$$x, y, z, \ldots, w.$$

Для полученія множителя Дирихле прежде всего замѣтимъ, что интегралъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\xi}{\xi}\,d\xi,$$

гдѣ α число постоянное, имѣетъ значеніе $+1$ при $\alpha > 0$, значеніе -1 при $\alpha < 0$, и значеніе 0 при $\alpha = 0$.

Поэтому простое равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\,\operatorname{Cos}\gamma\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)\xi}{\xi}\,d\xi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}(\beta-\gamma)\xi}{\xi}\,d\xi$$

обнаруживаетъ, что интегралъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\,.\,\operatorname{Cos}\gamma\xi}{\xi}\,d\xi,$$

гдѣ β и γ числа постоянныя и притомъ $\beta > 0$, имѣетъ значеніе 1, если

$$-\beta < \gamma < \beta,$$

значеніе 0, если γ лежитъ внѣ предѣловъ

$$-\beta \quad \text{и} \quad +\beta,$$

и наконецъ значеніе $\frac{1}{2}$, если γ совпадаетъ съ однимъ изъ чиселъ

$$-\beta \quad \text{и} \quad +\beta.$$

Въ силу же равенствъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\,\operatorname{Sin}\gamma\xi}{\xi}\,d\xi = 0 \quad \text{и} \quad e^{\gamma i\xi} = \operatorname{Cos}\gamma\xi + i\,\operatorname{Sin}\gamma\xi,$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, имѣемъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\,.\,\operatorname{Cos}\gamma\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{\gamma i\xi}\,d\xi.$$

Слѣдовательно при $\beta > 0$ должно быть

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}\,d\xi = 1, \quad \text{если} \quad -\beta < \gamma < \beta,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}\,d\xi = 0, \quad \text{если} \quad \gamma < -\beta \quad \text{или} \quad \gamma > \beta,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad \gamma = -\beta \quad \text{или} \quad \gamma = \beta.$$

Принявъ это во вниманіе, прибавимъ къ каждому произведенію

$$\rho\sigma\tau\ldots\,\omega$$

соотвѣтственный множитель

$$H = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}\,d\xi,$$

гдѣ

$\beta = t\sqrt{2A}$ и $\gamma = x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l$,

и разсмотримъ сумму

$$\Sigma H\rho\sigma\tau\ldots\,\omega.$$

Если ни одно изъ двухъ чиселъ

$a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{2A}$ и $a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{2A}$

не принадлежитъ къ числу значеній

$$x+y+z+\ldots+w,$$

то множитель H будетъ нулемъ для всѣхъ членовъ суммы

$$\Sigma H\rho\sigma\tau\ldots\,\omega$$

кромѣ тѣхъ, которымъ соотвѣтствуютъ неравенства

$$-t\sqrt{2A} < x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l < t\sqrt{2A}.$$

Для этихъ послѣднихъ

$$H = 1,$$

и потому сумма

$$\Sigma H \rho\sigma\tau \ldots \omega$$

приводится къ той именно суммѣ

$$\Sigma' \rho\sigma\tau \ldots \omega$$

которая выражаетъ вѣроятность неравенствъ

$$-t\sqrt{2A} < x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l < t\sqrt{2A}.$$

Если же сумма

$$x + y + z + \ldots + w$$

можетъ равняться

$$a + b + c + \ldots + l + t\sqrt{2A} \text{ или } a + b + c + \ldots + l - t\sqrt{2A},$$

то множитель H можетъ получать значеніе $\frac{1}{2}$.

Тогда, какъ нетрудно видѣть, сумма

$$\Sigma H \rho\sigma\tau \ldots \omega$$

будетъ среднею ариѳметическою двухъ суммъ, изъ которыхъ одна выражаетъ вѣроятность неравенствъ

$$-t\sqrt{2A} < x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l < t\sqrt{2A},$$

а другая вѣроятность тѣхъ же неравенствъ съ присоединеніемъ случаевъ равенства

$$x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l = -t\sqrt{2A}$$

и

$$x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l = +t\sqrt{2A}.$$

Другими словами, сумма

$$\Sigma H \rho\sigma\tau \ldots \omega$$

отличается отъ

$$\Sigma' \rho\sigma\tau \ldots \omega$$

только половиною вѣроятности выполненія одного изъ равенствъ

$$x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l=-t\sqrt{2A}$$

и

$$x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l=+t\sqrt{2A}.$$

Слѣдовательно, если пренебречь вѣроятностью послѣднихъ равенствъ, считая ихъ невозможными или маловѣроятными, то можно разсматривать сумму

$$\Sigma H\rho\sigma\tau\ldots\omega$$

какъ вѣроятность, что

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

лежитъ въ предѣлахъ

$$a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{2A} \text{ и } a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{2A}.$$

Обращаясь къ суммѣ

$$\Sigma H\rho\sigma\tau\ldots\omega$$

и замѣняя въ ней H соотвѣтствующимъ выраженіемъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin} t\xi\sqrt{2A}}{\xi}\,e^{i(x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l)\xi}\,d\xi,$$

получаемъ

$$\Sigma H\rho\sigma\tau\ldots\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega\frac{\operatorname{Sin} t\xi\sqrt{2A}}{\xi}\,d\xi,$$

гдѣ

$$\Omega=\Sigma\rho\sigma\tau\ldots\omega\, e^{i(x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l)\xi}$$

$$=\left\{\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi}\right\}\left\{\Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi}\right\}\ldots\left\{\Sigma\omega e^{i(w-l)\xi}\right\}.$$

Относительно суммъ

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi},\ \Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi},\ldots,\ \Sigma\omega e^{i(w-l)\xi}$$

прежде всего замѣтимъ, что ихъ модули, вообще говоря, меньше единицы:

$$\text{мод. } \Sigma\rho e^{i(x-a)\xi} \leqq \Sigma \text{ мод. } \rho e^{i(x-a)\xi} = \Sigma\rho = 1,$$

. . . .

$$\text{мод. } \Sigma\omega e^{i(w-l)\xi} \leqq \Sigma \text{ мод. } \omega e^{i(w-l)\xi} = \Sigma\omega = 1.$$

На этомъ основаніи, при большомъ числѣ величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W,$$

мы будемъ считать

модуль Ω

такимъ малымъ числомъ, которымъ можно пренебречь для всѣхъ значеній ξ кромѣ смежныхъ съ нулемъ.

Разсматривая разложеніе Ω въ рядъ по возрастающимъ степенямъ ξ и ограничиваясь первыми членами этого ряда, мы замѣнимъ Ω болѣе простымъ выраженіемъ, которое также близко къ нулю при всѣхъ значеніяхъ ξ, кромѣ смежныхъ съ нулемъ, и даетъ, при разложеніи по возрастающимъ степенямъ ξ, тѣже первые члены.

Для указанной цѣли разлагаемъ въ рядъ, по извѣстной формулѣ, каждое изъ выраженій

$$e^{i(x-a)\xi},\ e^{i(y-b)\xi}, \ldots,\ e^{i(w-l)\xi}$$

и подставляемъ эти разложенія въ суммы

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi},\ \Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi}, \ldots,\ \Sigma\omega e^{i(w-l)\xi}.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi} = \Sigma\rho + i\xi\Sigma\rho(x-a) - \frac{\xi^2}{2}\Sigma\rho(x-a)^2 + \ldots.$$

$$= 1 - \frac{a_1 - a^2}{2}\xi^2 + \ldots,$$

$$\Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi} = 1 - \frac{b_1 - b^2}{2}\xi^2 + \ldots,$$

. . . .

$$\Sigma\omega e^{i(w-l)\xi} = 1 - \frac{l_1 - l^2}{2}\xi^2 + \ldots,$$

и затѣмъ посредствомъ умноженія рядовъ находимъ

$$\Omega = 1 - \frac{A\xi^2}{2} + \ldots,$$

гдѣ A имѣетъ прежнее значеніе:

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2.$$

Тѣми же членами

$$1 - \frac{A}{2}\xi^2$$

начинается и разложеніе въ рядъ, по степенямъ ξ, показательной функціи

$$e^{-\frac{A}{2}\xi^2},$$

которая при всѣхъ значеніяхъ ξ, кромѣ смежныхъ съ нулемъ, близка къ нулю, если A число большое.

Подставляя эту функцію на мѣсто Ω, получаемъ для вѣроятности неравенствъ

$$-t\sqrt{2A} < X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l < t\sqrt{2A}$$

приближенную величину въ видѣ интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin} t\xi\sqrt{2A}}{\xi} e^{-\frac{1}{2}A\xi^2} d\xi,$$

который приводится къ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} t\zeta}{\zeta} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta,$$

если положить

$$2A\xi^2 = \zeta^2.$$

Съ другой стороны нетрудно доказать, что интегралъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} t\zeta}{\zeta} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta$$

равенъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2} dt.$$

Дѣйствительно, положивъ для краткости

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} t\zeta}{\zeta}\, e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\, d\zeta = V$$

и разсматривая V какъ функцію перемѣннаго числа t, посредствомъ дифференцированія подъ знакомъ интеграла получаемъ

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \operatorname{Cos} t\zeta\, d\zeta.$$

Второе же дифференцированіе даетъ

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta \operatorname{Sin} t\zeta\, d\zeta = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Sin} t\zeta\, d\left(e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\right),$$

откуда посредствомъ интегрированія по частямъ выводимъ

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{4t}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \operatorname{Cos} t\zeta\, d\zeta = -2t\frac{dV}{dt}$$

и затѣмъ

$$d\left\{\log\frac{dV}{dt}\right\} = d(-t^2).$$

Слѣдовательно

$$\frac{dV}{dt} = Ee^{-t^2},$$

гдѣ E означаетъ число постоянное, и

$$V = E\int_0^t e^{-t^2}\, dt,$$

ибо при $t = 0$ должно быть

$$V = 0.$$

Остается опредѣлить постоянное E.

Число E совпадаетъ со значеніемъ производной $\frac{dV}{dt}$ при $t=0$.

Давая же t значеніе 0, находимъ, что соотвѣтствующее значеніе $\frac{dV}{dt}$ выражается интеграломъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\, d\zeta,$$

который равенъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Итакъ

$$E=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и} \quad V=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt.$$

Изложенный нами выводъ приближенной величины вѣроятности неравенствъ

$$-t\sqrt{2A}<X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l<t\sqrt{2A}$$

не даетъ никакихъ указаній относительно размѣра погрѣшности этой приближенной величины.

И только по аналогіи съ тѣмъ, что было установлено при доказательствѣ теоремы Бернулли, можно догадываться, что интегралъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

будетъ при извѣстныхъ условіяхъ предѣломъ вѣроятности вышеприведенныхъ неравенствъ.

Замѣтимъ, что изслѣдованія Чебышева и мои о предѣльныхъ величинахъ интеграловъ привели къ строгому доказательству слѣдующей *теоремы о предѣлѣ вѣроятности.*

Если числа

$$a_1',\ a_1'',\ldots,\ a_1^{(n)},\ldots$$

и

$$a_2',\ a_2'',\ldots,\ a_2^{(n)},\ldots$$

представляютъ, соотвѣтственно, математическія ожиданія независимыхъ величинъ

$$X',\ X'',\ldots,\ X^{(n)},\ldots$$

и математическія ожиданія ихъ квадратовъ, то для любыхъ данныхъ чиселъ t_1 и $t_2>t_1$ вѣроятность неравенствъ

$$t_1\sqrt{2A}<X'+X''+\ldots+X^{(n)}-a_1'-a_1''-\ldots-a_1^{(n)}<t_2\sqrt{2A},$$

гдѣ

$$A = a_2' - a_1' a_1' + a_2'' - a_1'' a_1'' + \ldots + a_2^{(n)} - a_1^{(n)} a_1^{(n)},$$

приближается къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2} dz,$$

когда число величинъ

$$X', X'', \ldots, X^{(n)}$$

возрастаетъ безпредѣльно, если отношеніе

$$\frac{n}{A}$$

и математическія ожиданія всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ степеней разностей

$$X' - a_1', X'' - a_1'', \ldots, X^{(n)} - a_1^{(n)}$$

остаются конечными, какъ при конечныхъ значеніяхъ n, такъ и при безпредѣльномъ возрастаніи этого числа.

Не останавливаясь на доказательствѣ теоремы о предѣлѣ вѣроятности, мы ограничимся указаніемъ ряда статей, которыя содержатъ изслѣдованія, приводящія къ этому доказательству.

Tchebichef. Sur les valeurs limites des intégrales (Journal de Liouville, II série, t. XIX).

А. Марковъ. О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей. 1884.

Чебышевъ. О представленіи предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ (Прил. къ LI т. Запис. Акад. Наукъ, № 4).

C. Possé. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. 1886.

Чебышевъ. Объ интегральныхъ вычетахъ доставляющихъ приближенныя величины интеграловъ. (Прил. къ LV т. Запис. Акад. Наукъ, № 2).

Чебышевъ. О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей (Прил. къ LV т. Запис. Акад. Наукъ, № 6).

А. Марковъ. Законъ большихъ чиселъ и способъ наименьшихъ квадратовъ (Изв. физ. мат. общ. при Каз. Унив., т. VIII).

A. Markoff. Sur les racines de l'équation $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$ (Bull. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg, T. IX, № 5).

§ 17. Остановимся теперь на приложеніи исчисленія вѣроятностей, вообще, и обобщенной теоремы Бернулли, въ частности, къ вопросу о выгодности и не выгодности болѣе или менѣе рискованныхъ предпріятій.

Предполагая, что всѣ капиталы можно выразить числами при одной опредѣленной единицѣ мѣры, мы будемъ разсматривать каждое предпріятіе только съ точки зрѣнія увеличенія или уменьшенія капиталовъ разныхъ лицъ.

Понятіе о выгодности или невыгодности предпріятія для даннаго лица представляется вполнѣ яснымъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣтъ сомнѣнія въ томъ, должно ли это предпріятіе увеличить капиталъ лица или напротивъ уменьшить.

Именно, выгодны всѣ предпріятія, которыя несомнѣнно увеличиваютъ капиталъ, и не выгодны всѣ, которыя несомнѣнно уменьшаютъ капиталъ.

Совершенно иначе представляется дѣло для предпріятій рискованныхъ, т. е. для такихъ, которыя могутъ какъ увеличить, такъ и уменьшить капиталы участвующихъ лицъ.

Замѣтимъ, что съ математической точки зрѣнія едва ли не всѣ предпріятія слѣдуетъ признать болѣе или менѣе рискованными.

Для рискованныхъ предпріятій понятіе о выгодности или невыгодности ихъ не имѣетъ уже вполнѣ опредѣленнаго смысла.

Можно, конечно, сказать, что выгодны всѣ предпріятія, отъ которыхъ съ большою вѣроятностью слѣдуетъ ожидать значительнаго приращенія капитала, если притомъ возможный убытокъ представляется не только маловѣроятнымъ, но и незначительнымъ. Едва ли кто нибудь станетъ спорить противъ подобнаго утвержденія.

Но по своей неопредѣленности оно не можетъ служить общимъ основаніемъ для различія выгодныхъ предпріятій отъ убыточныхъ.

Сверхъ того условіе незначительности возможнаго убытка напрасно исключаетъ изъ числа выгодныхъ предпріятій многократное повтореніе одного и того же предпріятія, какимъ бы выгоднымъ ни представлялось это предпріятіе.

Стараясь провести рѣзкую границу между выгодными и невыгодными предпріятіями, мы вынуждены причислить къ выгоднымъ и такія предпріятія, которыя съ обыденной точки зрѣнія едва ли можно считать выгодными, въ виду сопряженнаго съ ними риска.

Для предпріятій, которыя допускаютъ перечисленіе всѣхъ возможныхъ результатовъ съ указаніемъ ихъ вѣроятностей, основаніемъ дѣленія на выгодныя и невыгодныя намъ послужитъ математическое ожиданіе приращенія капитала.

Именно мы назовемъ предпріятіе выгоднымъ, убыточнымъ, или неопредѣленнымъ, смотря по тому, будетъ ли математическое ожиданіе приращенія капитала, отъ этого предпріятія, числомъ положительнымъ, отрицательнымъ, или нулемъ.

Такое дѣленіе оправдывается ссылкой на обобщенную теорему Бернулли, если допустить возможность повторенія каждаго предпріятія неограниченное число разъ.

Въ силу обобщенной теоремы Бернулли отъ повторенія предпріятія достаточно большое число разъ слѣдуетъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, ожидать произвольно большой выгоды, если для этого предпріятія математическое ожиданіе приращенія капитала выражается положительнымъ числомъ.

Напротивъ, если для нѣкотораго предпріятія математическое ожиданіе приращенія капитала выражается отрицательнымъ числомъ, то отъ его повторенія достаточно большое число разъ слѣдуетъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, ожидать уменьшенія капитала.

Наконецъ въ третьемъ случаѣ, когда математическое ожиданіе приращенія капитала равно нулю, обобщенная теорема Бернулли указываетъ только на большую вѣроятность малыхъ значеній отношенія измѣненія капитала къ числу разъ выполненія предпріятія, если это число достаточно велико.

Но остается вполнѣ неопредѣленнымъ, будетъ ли это измѣненіе состоять въ увеличеніи или напротивъ въ уменьшеніи капитала: въ силу теоремы о предѣлѣ вѣроятностей разность вѣроятностей увеличенія и уменьшенія капитала будетъ произвольно мала, если предпріятіе повторится достаточное число разъ.

Замѣтимъ, что вопросъ о выгодности или невыгодности предпріятія должно разсматривать для каждаго изъ его участниковъ отдѣльно, такъ какъ интересы различныхъ участниковъ могутъ быть и часто бываютъ совершенно противоположными.

Разсмотрѣніе выгодности или невыгодности предпріятія, въ установленномъ нами смыслѣ представляетъ одно изъ руководящихъ основаній для рѣшенія вопроса о томъ, слѣдуетъ ли участвовать въ предпріятіи или нѣтъ; такъ какъ это разсмотрѣніе даетъ возможность судить о вѣроятныхъ результатахъ многократнаго повторенія предпріятія.

Хотя это руководящее основаніе не можетъ быть признано единственнымъ, но другого столь же опредѣленнаго нѣтъ.

Какъ при выгодныхъ, такъ и при невыгодныхъ предпріятіяхъ, должно имѣть въ виду не только вѣроятный результатъ ихъ многократнаго повторенія, но и возможные результаты ихъ повторенія различное число разъ.

При повтореніи выгоднаго предпріятія неограниченное число разъ обогащеніе становится крайне вѣроятнымъ; но такое повтореніе можетъ встрѣтить разнообразныя препятствія, изъ которыхъ одно состоитъ въ разореніи разсматриваемаго лица.

Поэтому важно опредѣлить вѣроятность предположенія, что при повтореніи предпріятія, различное число разъ, убытокъ не превзойдетъ данной величины.

Здѣсь можетъ быть полезнымъ приближенное выраженіе вѣроятности въ видѣ опредѣленнаго интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt,$$

указанное нами какъ предѣлъ вѣроятности.

Окончательное рѣшеніе вопроса о томъ, слѣдуетъ или не слѣдуетъ участвовать въ предпріятіи, зависитъ отъ чисто субъективнаго понятія о допустимой степени риска.

Теорія можетъ только предлагать тѣ или другія мѣры риска, но она не можетъ установить, какую степень риска должно признавать допустимою.

Подобныя же замѣчанія относятся и къ невыгоднымъ предпріятіямъ.

Всѣ проекты вѣрнаго обогащенія посредствомъ невыгодныхъ предпріятій основаны на заблужденіи.

Однако выполненіе невыгоднаго предпріятія иногда можно считать благоразумнымъ; именно въ тѣхъ случаяхъ, когда это невыгодное предпріятіе уменьшаетъ вѣроятность большихъ потерь, грозящихъ разореніемъ.

Пояснимъ сказанное частными примѣрами.

Положимъ, что нѣкоторое предпріятіе можетъ представить только два случая, изъ которыхъ одинъ даетъ увеличеніе нашего капитала на десять рублей, а другой, напротивъ, уменьшеніе на тысячу двѣсти рублей.

Пусть далѣе вѣроятность перваго случая равна 0,99, а вѣроятность второго 0,01.

Математическое ожиданіе нашей выгоды отъ этого предпріятія выражается, въ рубляхъ, отрицательнымъ числомъ

$$0{,}99\times 10 - 0{,}01\times 1200 = -2{,}1,$$

что указываетъ на невыгодность предпріятія.

Выполняя его одинъ разъ, мы можемъ расчитывать, съ довольно большою вѣроятностью (0,99), пріобрѣсть незначитель-

ную сумму (10 руб.), но рискуемъ потерять гораздо большую сумму (1200 руб.), хотя и съ малою вѣроятностью (0,01).

Если же въ видахъ возможнаго обогащенія мы станемъ повторять это предпріятіе неограниченное число разъ, то вѣроятнымъ результатомъ такого повторенія будетъ не обогащеніе, а разореніе.

Такъ уже при стократномъ повтореніи предпріятія вѣроятность прибыли оказывается значительно меньше вѣроятности убытка; именно вѣроятность прибыли при стократномъ повтореніи предпріятія выражается числомъ

$$(0,99)^{100} \approx 0,36603$$

и потому вѣроятность убытка равна

$$1-(0,99)^{100} \approx 0,63397.$$

Между тѣмъ такое стократное повтореніе предпріятія не доводитъ возможную прибыль даже до величины возможнаго убытка одного предпріятія.

При повтореніи предпріятія 10000 разъ возможная прибыль достигаетъ до 100000 рублей, но вѣроятность такой прибыли выражается весьма малымъ числомъ

$$(0,99)^{10000} \approx \frac{2249}{10^{47}}.$$

И не только вѣроятность получить прибыль въ 100000 руб., но и вѣроятность получить прибыль, вообще, оказывается довольно малою, при повтореніи предпріятія 10000 разъ.

Дѣйствительно, вѣроятность получить, при повтореніи предпріятія 10000 разъ, какую нибудь прибыль выражается суммою восьмидесяти трехъ членовъ

$$(0,99)^{10000} + 10000\,(0,99)^{9999}\,(0,01) + \ldots + \\ + \frac{1.2.3\ldots.\,10000}{1.2\ldots.\,82.12\ldots.\,9918}(0,99)^{9918}\,(0,01)^{82},$$

изъ которыхъ послѣдній

$$\frac{1.2.3\ldots.\,10000}{1.2\ldots.\,82.\,12\ldots.\,9918}(0,99)^{9918}\,(0,01)^{82}$$

меньше числа

$$\sqrt{\frac{10000}{2\pi.82.9918}}\left(\frac{9900}{9918}\right)^{9918}\left(\frac{100}{82}\right)^{82}=0,00773....$$

Отношеніе же этой суммы къ ея послѣднему члену, какъ нетрудно убѣдиться, меньше

$$\frac{1}{1-\frac{82.99}{9919}}=\frac{9919}{1801}=5,5....$$

Такъ какъ произведеніе чиселъ

$$0,00773.... \text{ и } 5,5....$$

меньше 0,05, то и разсматриваемая нами вѣроятность прибыли, при повтореніи предпріятія 10000 разъ, меньше 0,05.

Наконецъ, при повтореніи предпріятія 1000000 разъ оказывается весьма малою не только вѣроятность избѣжать убытка, но и вѣроятность, что убытокъ будетъ меньше крупной суммы 100000 руб.

Прибѣгая къ приближеннымъ вычисленіямъ, мы можемъ за послѣднюю вѣроятность принять

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

гдѣ t опредѣляется уравненіемъ

$$(np+t\sqrt{2npq})A-(nq-t\sqrt{2npq})B=-100000$$

при

$$n=1000000,\ p=0,99,\ q=0,01,\ A=10,\ B=1200.$$

Указанное уравненіе даетъ для t величину

$$\frac{2000000}{1210\sqrt{19800}}>11,$$

при которой разность

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

меньше $\frac{1}{10^{50}}$.

Чтобы имѣть затѣмъ примѣръ выгоднаго предпріятія, сохранимъ всѣ условія только что разсмотрѣннаго примѣра, кромѣ одного: именно, за величину возможной прибыли будемъ считать не 10, а 20 рублей.

Тогда математическое ожиданіе прибыли выразится, въ рубляхъ, положительнымъ числомъ

$$20\times 0{,}99 - 1200\times 0{,}01 = 7{,}8,$$

что и указываетъ на выгодность предпріятія.

Однократное выполненіе такого предпріятія представляетъ, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, незначительную прибыль (20 руб.), соединенную съ рискомъ потерять гораздо большую сумму (1200 руб.).

При стократномъ повтореніи предпріятія вѣроятность убытка перестаетъ уже быть очень малою величиною: она выражается тогда разностью

$$1 - (0{,}99)^{100}\left\{1 + \frac{100}{99}\right\}$$

равною

$$0{,}2642$$

съ точностью до $\frac{1}{2.10^4}$.

Если же мы имѣемъ возможность повторить это предпріятіе произвольное число разъ, то можемъ расчитывать обогатиться съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности; впрочемъ не устранена, окончательно, и возможность разоренія.

При повтореніи предпріятія 10000 разъ вѣроятность убытка выразится суммою

$$\frac{1.2\ldots.\,10000}{1.2\ldots.\,164.\,1.2\ldots.\,9836}(0{,}99)^{9836}(0{,}01)^{164} +$$
$$\frac{1.2\ldots.\,10000}{1.2\ldots.\,165.\,1.2\ldots.\,9835}(0{,}99)^{9835}(0{,}01)^{165} + \ldots.$$

и будетъ меньше

$$\sqrt{\frac{10000}{2\pi.164.9836}}\left(\frac{9900}{9836}\right)^{9836}\left(\frac{100}{164}\right)^{164}\frac{1}{1-\frac{9836}{165.99}},$$

послѣднее же произведеніе меньше $\frac{1}{10^8}$.

Наконецъ при повторенiи предпрiятiя 1000000 разъ становится весьма близкою къ единицѣ вѣроятность получить прибыль не меньше 1000000. Именно, прибѣгая къ приближеннымъ вычисленiямъ, мы можемъ за послѣднюю вѣроятность принять

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt,$$

гдѣ t опредѣляется уравненiемъ

$$(np-t\sqrt{2npq})\,A-(nq+t\sqrt{2npq})\,B=1000000$$

при

$$n=1000000,\ p=0{,}99,\ q=0{,}01,\ A=20,\ B=1200.$$

Указанное уравненiе даетъ для t величину

$$\frac{6800000}{1220\sqrt{19800}}>30,$$

при которой сумма

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

отличается отъ единицы на величину меньшую

$$\frac{e^{-900}}{60}.$$

Изъ второго примѣра мы получимъ третiй, переставивъ прибыль съ убыткомъ.

Предпрiятiе, дающее прибыль 1200 рублей съ вѣроятностью 0,01 и убытокъ 20 рублей съ вѣроятностью 0,99, не выгодно, такъ какъ математическое ожиданiе соотвѣтствующей прибыли выражается, въ рубляхъ, отрицательнымъ числомъ

$$1200\times0{,}01-20\times0{,}99=-7{,}8.$$

Поэтому нельзя рекомендовать многократное повторенiе одного этого предпрiятiя съ цѣлью обогащенiя.

Но повторенiе его небольшое число разъ можетъ быть допущено въ виду незначительности убытка.

Можно также признать благоразумнымъ присоединенiе этого предпрiятiя къ другимъ выгоднымъ но рискованнымъ предпрiятiямъ.

Положимъ напримѣръ, что нѣкоторое предпріятіе представляетъ убытокъ 1100 рублей и прибыль въ 120 рублей соотвѣтственно въ тѣхъ случаяхъ, когда только что разсмотрѣнное предпріятіе даетъ прибыль 1200 рублей и убытокъ 20 рублей.

Тогда, присоединяя къ этому новому выгодному но рискованному предпріятію разсмотрѣнное нами невыгодное предпріятіе, мы обезпечиваемъ себѣ вѣрную выгоду 100 рублей.

На подобныхъ началахъ основаны различные виды страхованія.

§ 18. Съ понятіемъ о выгодныхъ и не выгодныхъ предпріятіяхъ тѣсно связано понятіе о *безобидныхъ* и *небезобидныхъ играхъ*.

Игрою мы называемъ здѣсь не развлеченіе, а всякое предпріятіе, которое представляетъ возможность различныхъ измѣненій капитала каждаго участника въ отдѣльности, но не измѣняетъ общаго ихъ капитала.

При томъ, подобно прежнему, мы будемъ предполагать, что можно перечислить для каждаго участника всѣ возможныя измѣненія его капитала и указать ихъ вѣроятности.

Участниковъ игры мы будемъ называть игроками, и въ случаѣ надобности будемъ отличать ихъ другъ отъ друга нумерами

$$1, 2, 3 \ldots .$$

или буквами A, B, $C \ldots .$

Пусть

$$X_1, X_2, X_3, \ldots .$$

представляютъ, соотвѣтственно, для игроковъ

$$1, 2, 3, \ldots .$$

приращенія ихъ капиталовъ, происходящія отъ игры.

Такъ какъ игра не измѣняетъ общей суммы капиталовъ всѣхъ игроковъ, то сумма

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots .$$

приращеній капиталовъ всѣхъ игроковъ должна приводиться къ нулю.

Поэтому должна равняться нулю и сумма математическихъ ожиданій тѣхъ же приращеній:

$$\text{м. о. } X_1 + \text{м. о. } X_2 + \text{м. о. } X_3 + \ldots = 0.$$

И слѣдовательно, если для нѣкоторыхъ изъ игроковъ математическія ожиданія приращеній ихъ капиталовъ отъ игры выражаются числами положительными, то должны быть и такіе игроки, для которыхъ математическія ожиданія приращеній ихъ капиталовъ отъ той же игры выражаются отрицательными числами.

Тогда для однихъ игроковъ игра будетъ выгоднымъ предпріятіемъ, а для другихъ невыгоднымъ; и при повтореніи ея неограниченное число разъ тѣ игроки, для которыхъ игра выгодна, могутъ расчитывать почти навѣрняка обыграть другихъ, для которыхъ игра невыгодна.

Отсюда вытекаетъ такое условіе *безобидности* игръ: *математическое ожиданіе приращенія капитала для каждаго игрока должно приводиться къ нулю.*

Для игръ не безобидныхъ можно, почти съ увѣренностью, предсказывать, кто изъ игроковъ обогатится и кто разорится, при повтореніи игры неограниченное число разъ.

Относительно же безобидныхъ игръ нельзя сдѣлать подобнаго предсказанія. Вмѣстѣ съ тѣмъ однако нельзя полагать, чтобы безобидныя игры при многократномъ ихъ повтореніи не производили значительныхъ измѣненій въ капиталахъ игроковъ и не разоряли никого изъ нихъ.

Изъ доказанныхъ нами теоремъ этого не слѣдуетъ и не можетъ слѣдовать.

Обобщенная теорема Бернулли указываетъ только на большую вѣроятность, что будутъ малыми отношенія измѣненій капиталовъ игроковъ къ числу повтореній безобидной игры; но при малыхъ величинахъ этихъ отношеній сами измѣненія могутъ быть значительными.

И теорема о предѣлѣ вѣроятности обнаруживаетъ малость

вѣроятности, что измѣненія капиталовъ игроковъ останутся малыми при многократномъ повтореніи безобидной игры.

Изъ той же теоремы о предѣлѣ вѣроятности слѣдуетъ, что для каждаго игрока вѣроятность получить произвольно большую прибыль и вѣроятность получить произвольно большой убытокъ стремятся къ одному и тому же предѣлу $\frac{1}{2}$, когда число повтореній безобидной игры увеличивается безпредѣльно.

Условіе безобидности игръ должно служить руководящимъ основаніемъ денежныхъ расчетовъ между участниками такихъ предпріятій, которыя подходятъ подъ установленное нами понятіе игры.

Довольно часто допускаются, однако, отступленія отъ этого условія, результатъ которыхъ выражается въ обогащеніи однихъ лицъ на счетъ другихъ. Это бываетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда игра организована, съ цѣлью болѣе или менѣе вѣрной наживы, одними участниками такъ, чтобы ее можно было повторять неограниченное число разъ при измѣненіи другихъ участниковъ.

Если организаторы игры сохранили бы условіе безобидности относительно прочихъ участниковъ, то ихъ цѣль не была бы достигнута и они подвергались бы большому риску разоренія.

Что же касается прочихъ участниковъ, изъ которыхъ каждый участвуетъ въ игрѣ только сравнительно небольшое число разъ, то они могутъ считать свое участіе въ ней благоразумнымъ даже и при нѣкоторомъ, неслишкомъ большомъ, нарушеніи условія безобидности, если это предпріятіе предохраняетъ ихъ отъ другого риска; какъ было уже пояснено на частномъ примѣрѣ при разсмотрѣніи выгодныхъ и не выгодныхъ предпріятій.

Здѣсь можетъ возникнуть вопросъ о допустимой степени нарушенія условія безобидности игръ. Но на этотъ вопросъ нельзя дать опредѣленнаго отвѣта; подобно тому, какъ раньше, мы отказались установить допустимую степень риска.

ГЛАВА IV.

Примѣры различныхъ пріемовъ вычисленія вѣроятностей.

§ 19. *Задача 1ая.* Изъ сосуда, содержащаго a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ и никакихъ другихъ, вынимаютъ одновременно или послѣдовательно $\alpha+\beta$ шаровъ, при чемъ, въ случаѣ послѣдовательнаго выниманія, ни одинъ изъ вынутыхъ шаровъ не возвращаютъ обратно въ сосудъ и новыхъ туда также не подкладываютъ.

Требуется опредѣлить вѣроятность, что между вынутыми такимъ образомъ шарами будетъ α бѣлыхъ и β черныхъ.

Первое рѣшеніе. Положимъ, что всѣ шары въ сосудѣ отличены другъ отъ друга нумерами, при томъ такимъ образомъ, что на бѣлыхъ стоятъ нумера

$$1, 2, 3, \ldots, a,$$

а на черныхъ нумера

$$a+1,\ a+2, \ldots,\ a+b.$$

Нумера вынутыхъ шаровъ должны образовать нѣкоторую совокупность $\alpha+\beta$ нумеровъ изъ всѣхъ $a+b$ нумеровъ

$$1, 2, 3, \ldots, a+b.$$

Число различныхъ совокупностей $\alpha + \beta$ нумеровъ, которыя можно образовать изъ $a + b$ нумеровъ, равно

$$\frac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ (\alpha+\beta)}.$$

Соответственно этому мы можемъ различить

$$\frac{(a+b)(a+b-1)\ldots\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.2.3.\ldots(\alpha+\beta)}$$

равновозможныхъ случаевъ, каждый изъ которыхъ состоитъ въ появленіи опредѣленныхъ $\alpha + \beta$ нумеровъ.

Изъ всѣхъ этихъ случаевъ, единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ, благопріятствуютъ появленію α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ тѣ и только тѣ, при которыхъ появляется какая нибудь совокупность α нумеровъ, изъ группы

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots,\ a$$

вмѣстѣ съ какою нибудь совокупностью β нумеровъ изъ группы

$$a+1,\ a+2,\ldots\ldots,\ a+b.$$

Число различныхъ совокупностей α нумеровъ, которыя можно образовать изъ a нумеровъ, равно

$$\frac{a(a-1)\ldots\ldots(a-\alpha+1)}{1.\ 2.\ldots\ \alpha},$$

и число различныхъ совокупностей β нумеровъ, которыя можно образовать изъ b нумеровъ, равно

$$\frac{b(b-1)\ldots\ldots(b-\beta+1)}{1.\ 2.\ldots\ \beta}.$$

Поэтому число различныхъ совокупностей $\alpha + \beta$ нумеровъ, которыя получатся отъ соединенія каждой совокупности α нумеровъ изъ группы

$$1,\ 2,\ldots\ldots,\ a$$

съ каждою совокупностью β нумеровъ изъ группы

$$a+1,\ a+2,\ldots\ldots,\ a+b,$$

выразится произведеніемъ

$$\frac{a(a-1)\ldots.(a-\alpha+1)}{1.\ 2\ldots.\ \alpha} \cdot \frac{b(b-1)\ldots.(b-\beta+1)}{1.\ 2\ldots.\ \beta}.$$

Итакъ число разсматриваемыхъ нами случаевъ, которые благопріятствуютъ появленію α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, выражается только что указаннымъ произведеніемъ.

И слѣдовательно искомая нами вѣроятность, что среди вынутыхъ $\alpha+\beta$ шаровъ будетъ α бѣлыхъ и β черныхъ, выразится отношеніемъ

$$\frac{\dfrac{a(a-1)\ldots.(a-\alpha+1)}{1.\ 2\ldots.\ \alpha}\,\dfrac{b(b-1)\ldots.(b-\beta+1)}{1.\ 2\ldots.\ \beta}}{\dfrac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots.(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ (\alpha+\beta)}},$$

которое послѣ простыхъ преобразованій приводится къ

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ldots.(\alpha+\beta)}{1.\ 2\ldots.\ \alpha.\ 1.\ 2\ldots.\ \beta}\ \frac{a(a-1)\ldots.(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots.(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots.\ (a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числовой примѣръ: $a=3,\ b=4,\ \alpha=2,\ \beta=2.$

Предполагаемъ, что на бѣлыхъ шарахъ поставлены нумера 1, 2, 3 и на черныхъ нумера 4, 5, 6, 7.

Нумера на вынутыхъ четырехъ шарахъ могутъ представлять любую изъ слѣдующихъ

$$\frac{7.\ 6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=35$$

совокупностей:

1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 5; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 3, 7; 1, 2, 4, 5; 1, 2, 4, 6; 1, 2, 4, 7;
1, 2, 5, 6; 1, 2, 5, 7; 1, 2, 6, 7; 1, 3, 4, 5; 1, 3, 4, 6; 1, 3, 4, 7; 1, 3, 5, 6;
1, 3, 5, 7; 1, 3, 6, 7; 1, 4, 5, 6; 1, 4, 5, 7; 1, 4, 6, 7; 1, 5, 6, 7; 2, 3, 4, 5;
2, 3, 4, 6; 2, 3, 4, 7; 2, 3, 5, 6; 2, 3, 5, 7; 2, 3, 6, 7; 2, 4, 5, 6; 2, 4, 5, 7;
2, 4, 6, 7; 2, 5, 6, 7; 3, 4, 5, 6; 3, 4, 5, 7; 3, 4, 6, 7; 3, 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7.

Если же вынуты 2 бѣлыхъ и 2 черныхъ шара, то ихъ нумера образуютъ одну изъ слѣдующихъ

$$\frac{3.\ 2}{1.\ 2}\times\frac{4.\ 3}{1.\ 2}=18$$

совокупностей:

1, 2, 4, 5; 1, 2, 4, 6; 1, 2, 4, 7; 1, 2, 5, 6; 1, 2, 5, 7; 1, 2, 6, 7;

1, 3, 4, 5; 1, 3, 4, 6; 1, 3, 4, 7; 1, 3, 5, 6; 1, 3, 5, 7; 1, 3, 6, 7;

2, 3, 4, 5; 2, 3, 4, 6; 2, 3, 4, 7; 2, 3, 5, 6; 2, 3, 5, 7; 2, 3, 6, 7.

Такимъ образомъ мы имѣемъ 35 равновозможныхъ случаевъ, изъ которыхъ 18 благопріятствуютъ разсматриваемому событію; слѣдовательно искомая вѣроятность, что между вынутыми четырьмя шарами бѣлыхъ и черныхъ будетъ по два, равна $\frac{18}{35}$.

Второе рѣшеніе.

Для отличія вынутыхъ шаровъ другъ отъ друга положимъ, что независимо отъ цвѣта они размѣщены въ какомъ нибудь порядкѣ и соотвѣтственно этому припишемъ имъ нумера

$$1,\ 2, \ldots,\ \alpha+\beta.$$

Наши нумера могутъ указывать порядокъ появленія шаровъ, если шары вынуты изъ сосуда послѣдовательно.

Послѣ этого для опредѣленія вѣроятности разсматриваемаго событія, которое состоитъ въ появленіи α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, мы можемъ разбить его на отдѣльные виды, отличающіеся другъ отъ друга порядкомъ бѣлыхъ и черныхъ шаровъ.

Число этихъ видовъ равно

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots (\alpha+\beta)}{1.\ 2 \ldots \alpha.\ 1.\ 2 \ldots \beta}$$

и каждый изъ нихъ состоитъ въ бѣломъ цвѣтѣ α шаровъ, отмѣченныхъ опредѣленными нумерами, и въ черномъ цвѣтѣ остальныхъ вынутыхъ шаровъ.

Останавливаясь на любомъ изъ этихъ видовъ замѣтимъ, что онъ приводится къ одновременному существованію $\alpha+\beta$ событій

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k, \ldots,\ E_{\alpha+\beta},$$

гдѣ E_k означаетъ опредѣленный цвѣтъ, бѣлый или черный, шара съ нумеромъ k.

Вѣроятность же одновременнаго существованія всѣхъ событій

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k, \ldots,\ E_{\alpha+\beta}$$

выражается, согласно теоремѣ умноженія вѣроятностей, произведеніемъ

$$(E_1)\,(E_2,\ E_1)\ldots(E_k,\ E_1\,E_2\ldots\ E_{k-1})\ldots(E_{\alpha+\beta},\ E_1E_2\ldots E_{\alpha+\beta-1}),$$

гдѣ

$$(E_k,\ E_1\,E_2\ldots\ E_{k-1})$$

представляетъ вѣроятность событія E_k, когда извѣстно существованіе событій

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_{k-1}.$$

Чтобы опредѣлить послѣднюю вѣроятность, надо сосчитать, сколько разъ среди событій

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_{k-1}$$

встрѣчается бѣлый цвѣтъ шара и сколько разъ черный.

Если среди событій

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_{k-1}$$

бѣлый цвѣтъ встрѣчается i разъ, а черный j разъ, причемъ $i+j=k-1$; то при несомнѣнномъ ихъ существованіи шаръ съ нумеромъ k можетъ быть только однимъ изъ

$$a+b-k+1$$

шаровъ, среди которыхъ $a-i$ бѣлыхъ и $b-j$ черныхъ.

И потому вѣроятность, что шаръ съ нумеромъ k бѣлый, выразится при такихъ данныхъ дробью

$$\frac{a-i}{a+b-k+1},$$

а вѣроятность, что онъ черный, при тѣхъ же данныхъ выра-

зится дробью

$$\frac{b-j}{a+b-k+1}.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$(E_k, E_1 E_2 \ldots . E_{k-1}) = \frac{\sigma_k}{a+b-k+1},$$

гдѣ

$$\sigma_k = a - i \quad \text{или} \quad \sigma_k = b - j,$$

смотря потому, означаетъ ли E_k бѣлый или черный цвѣтъ шара съ нумеромъ k; числа же i и j, сообразно сказанному нами, показываютъ соотвѣтственно, сколько разъ встрѣчается бѣлый цвѣтъ шара и сколько разъ встрѣчается черный цвѣтъ шара среди событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}.$$

Опредѣляя по указанному правилу каждую изъ вѣроятностей

$$(E_2, E_1), (E_3, E_1 E_2), \ldots, (E_{\alpha+\beta}, E_1 E_2 \ldots . E_{\alpha+\beta-1})$$

и замѣчая, что

$$(E_1) = \frac{\sigma_1}{a+b},$$

гдѣ

$$\sigma_1 = a \quad \text{или} \quad \sigma_1 = b,$$

находимъ для вѣроятности появленія всѣхъ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{\alpha+\beta}$$

такое выраженіе:

$$\frac{\sigma_1 \sigma_2 \ldots . \sigma_{\alpha+\beta}}{(a+b)(a+b-1) \ldots . (a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числитель

$$\sigma_1 \sigma_2 \ldots . \sigma_{\alpha+\beta}$$

этого выраженія состоитъ изъ α множителей вида $a-i$ и β множителей вида $b-j$; ибо среди всѣхъ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{\alpha+\beta}$$

бѣлый цвѣтъ встрѣчается α разъ, а черный β разъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ нетрудно видѣть, что какъ i въ разности $a-i$, такъ и j въ разности $b-j$, означаетъ число тѣхъ множителей произведенія

$$\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta},$$

которые предшествуютъ этой разности и имѣютъ одинаковый съ нею видъ.

Слѣдовательно произведеніе

$$\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}$$

состоитъ изъ множителей

$$a,\ a-1, \ldots,\ a-\alpha+1$$

и изъ множителей

$$b,\ b-1, \ldots,\ b-\beta+1,$$

и потому оно равно

$$a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\, b(b-1)\ldots(b-\beta+1).$$

Итакъ вѣроятность любого изъ указанныхъ нами видовъ появленія, среди вынутыхъ $\alpha+\beta$ шаровъ, α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, имѣетъ одну и ту же величину

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\, b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Остается вспомнить, что число этихъ видовъ равно

$$\frac{1.\,2.\,3\ldots(\alpha+\beta)}{1.\,2.\,3\ldots\alpha.\;1.\,2\ldots\beta},$$

и теорема сложенія вѣроятностей тотчасъ дастъ намъ для искомой вѣроятности, что среди вынутыхъ $\alpha+\beta$ шаровъ будетъ α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, прежнюю величину

$$\frac{1.\,2\ldots(\alpha+\beta)}{1.\,2\ldots\alpha.\;12\ldots\beta} \cdot \frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\, b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числовой примѣръ: $a=3$, $b=4$, $\alpha=2$, $\beta=2$.

Обращая вниманіе на порядокъ вынутыхъ шаровъ, мы можемъ разбить событіе, вѣроятность котораго ищемъ, на такіе виды:

ббчч, бчбч, бччб, чббч, чбчб, ччбб,

гдѣ буква *б* указываетъ на бѣлый цвѣтъ, а буква *ч* на черный цвѣтъ шара.

Число этихъ видовъ разсматриваемаго событія равно

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 1.\ 2} = 6,$$

а вѣроятности ихъ, согласно теоремѣ умноженія вѣроятностей, выражаются произведеніями

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},$$

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},\quad \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},$$

которыя приводятся къ одной и той же дроби

$$\frac{3}{35}.$$

Слѣдовательно искомая вѣроятность, что между вынутыми четырьмя шарами бѣлыхъ и черныхъ будетъ по два, равна $\frac{18}{35}$, какъ было найдено и другимъ путемъ.

*Задача 2*ᵃᵃ. Изъ сосуда, содержащаго n билетовъ съ нумемерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n$$

и никакихъ другихъ, вынимаютъ одновременно или послѣдовательно m билетовъ, при чемъ, въ случаѣ послѣдовательнаго выниманія, ни одинъ изъ вынутыхъ билетовъ пе возвращаютъ обратно въ сосудъ и новыхъ туда также не подкладываютъ.

Требуется опредѣлить вѣроятность, что между нумерами вынутыхъ билетовъ появятся i нумеровъ, указанныхъ заранѣе, напр. $1, 2, 3, \ldots, i$.

Рѣшеніе.

Эту задачу можно разсматривать какъ тотъ частный случай предыдущей, когда $a = \alpha$.

Именно можно i билетовъ, нумера которыхъ указаны заранѣе, уподобить бѣлымъ шарамъ, а остальные билеты уподобить чернымъ шарамъ.

Такое уподобленіе тотчасъ обнаруживаетъ, что рѣшеніе поставленной задачи получится изъ рѣшенія предыдущей черезъ замѣну всѣхъ чиселъ

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta$$

соотвѣтственно числами

$$i,\ n-i,\ i,\ m-i.$$

Обращаясь на этомъ основаніи къ найденному раньше выраженію

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots . (\alpha+\beta)}{1.\ 2 \ldots . \alpha.\ 1.\ 2 \ldots . \beta}\ \frac{a(a-1) \ldots . (a-\alpha+1)\ b(b-1) \ldots . (b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1) \ldots . (a+b-\alpha-\beta+1)}$$

и дѣлая въ немъ указанную замѣну, получаемъ величину искомой вѣроятности въ видѣ произведенія

$$\frac{1.\ 2 \ldots . m}{1.\ 2 \ldots . i.\ 1.\ 2 \ldots . (m-i)}\ \frac{i(i-1) \ldots . 1\ (n-i)(n-i-1) \ldots . (n-m+1)}{n(n-1) \ldots . (n-m+1)}$$

которое послѣ сокращенія приводится къ

$$\frac{m(m-1) \ldots . (m-i+1)}{n(n-1) \ldots . (n-i+1)}.$$

Итакъ искомая вѣроятность, что среди вынутыхъ m нумеровъ окажутся всѣ указанные напередъ i нумеровъ, выражается дробью

$$\frac{m(m-1) \ldots . (m-i+1)}{n(n-1) \ldots . (n-i+1)}.$$

Другое рѣшеніе. Положимъ, что на билетахъ ставятся новые нумера: на вынутыхъ

$$1,\ 2,\ 3, \ldots ., m,$$

а на оставшихся въ сосудѣ

$$m+1,\ m+2, \ldots, n.$$

Тогда для указанныхъ напередъ i билетовъ новые ихъ нумера образуютъ какую нибудь совокупность i нумеровъ изъ всѣхъ n нумеровъ.

На этомъ основаніи мы можемъ различить

$$\frac{n(n-1) \ldots (n-i+1)}{1.\ 2 \ldots i}$$

равновозможныхъ случаепъ, каждому изъ которыхъ соотвѣтствуетъ опредѣленная совокупность новыхъ нумеровъ на указанныхъ напередъ i билетахъ.

Изъ всѣхъ этихъ случаевъ, единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ, благопріятствуютъ появленію всѣхъ указанныхъ напередъ i билетовъ тѣ и только тѣ, при которыхъ вся совокупность новыхъ нумеровъ на этихъ билетахъ составлена изъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, m.$$

Число же различныхъ совокупностей i нумеровъ, которыя можно составить изъ m нумеровъ, равно

$$\frac{m(m-1) \ldots (m-i+1)}{1.\ 2 \ldots i}.$$

Итакъ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ равно

$$\frac{n(n-1) \ldots (n-i+1)}{1.\ 2 \ldots i},$$

а число благопріятствующихъ событію равно

$$\frac{m(m-1) \ldots (m-i+1)}{1.\ 2 \ldots i};$$

и слѣдовательно искомая вѣроятность, что среди вынутыхъ m билетовъ будутъ всѣ указанные напередъ i билетовъ, выражается дробью

$$\frac{m(m-1) \ldots (m-i+1)}{n(n-1) \ldots (n-i+1)},$$

согласно прежнему выводу.

Для примѣра остановимся на лотереѣ, которая въ прежнее время разыгрывалась во Франціи и во многихъ Германскихъ областяхъ.

Она состояла изъ 90 нумеровъ и, при каждомъ ея розыгрышѣ, выходило по 5 нумеровъ. По условію лотереи можно было ставить ту или другую сумму на любой нумеръ, или на любую совокупность двухъ, трехъ, четырехъ, или наконецъ пяти нумеровъ, что называлось, соотвѣтственно, простой одиночкой (l'extrait simple), амбо (l'ambe), тернъ (le terne), катернъ (le quaterne) и кинъ (le quine).

Если въ числѣ вышедшихъ пяти нумеровъ находилась совокупность тѣхъ, на которые игрокъ поставилъ сумму, то администрація лотереи выдавала этому игроку условленную сумму, находящуюся въ опредѣленномъ отношеніи къ величинѣ ставки.

Это отношеніе

для простой одиночки равнялось	15,
для амбо	270,
для тернъ	5500,
для катернъ	75000,
для кинъ	1000000.

Для вычисленія вѣроятностей появленія простой одиночки, амбо, тернъ, катернъ и кинъ слѣдуетъ въ найденномъ нами выраженіи

$$\frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{n(n-1)\dots(n-i+1)}$$

положить

$$n = 90 \quad \text{и} \quad m = 5$$

и давать i послѣдовательно значенія

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Такимъ образомъ находимъ, что вѣроятность появленія

простой одиночки равна $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$,

амбо . . . . $\frac{5.4}{90.89} = \frac{2}{801}$,

тернъ . . . . $\frac{5.4.3}{90.89.88} = \frac{1}{11748}$,

катернъ . . . . $\frac{5.4.3.2}{90.89.88.87} = \frac{1}{511038}$,

кинъ . . . . $\frac{1}{511038} \cdot \frac{1}{86} = \frac{1}{43949268}$.

Поэтому, если ставка игрока равна M, то математическое ожиданіе его прибыли отъ участія въ лотереи выражается:

въ случаѣ простой одиночки числомъ $\left(\frac{15}{18} - 1\right) M = -\frac{1}{6} M$,

въ случаѣ амбо . . . . $\left(\frac{540}{801} - 1\right) M = -\frac{29}{89} M$,

въ случаѣ тернъ. . . . . $\left(\frac{5500}{11748} - 1\right) M = -\frac{1562}{2937} M$

и т. д.

Во всѣхъ случаяхъ, какъ мы видимъ, это математическое ожиданіе было числомъ отрицательнымъ; слѣдовательно лотерея, о которой идетъ рѣчь, представляла игру далеко не безобидную.

Этому выводу соотвѣтствуетъ тотъ фактъ, что лотерея приносила значительную выгоду устроителямъ ея.

§ 20. *Задача 3ья*. Изъ сосуда, содержащаго n билетовъ съ нумерами

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

и никакихъ другихъ, вынимаютъ одновременно m билетовъ, что мы назовемъ первымъ тиражемъ.

Затѣмъ вынутые билеты возвращаютъ въ сосудъ и производятъ подобный же второй тиражъ m билетовъ. По окончаніи второго тиража вынутые билеты возвращаютъ также въ сосудъ и производятъ третій тиражъ m билетовъ и т. д.

Требуется при k такихъ тиражахъ опредѣлить:

1) вѣроятность, что i опредѣленныхъ нумеровъ не появятся;

2) вѣроятность, что i опредѣленныхъ нумеровъ не появятся, а другіе l опредѣленныхъ нумеровъ появятся;

3) вѣроятность, что l опредѣленныхъ нумеровъ появятся;

4) вѣроятность, что появятся только l опредѣленныхъ нумеровъ;

5) вѣроятность, что появятся всѣ нумера.

Рѣшеніе. Положимъ для краткости

$$\left\{\frac{p(p-1)\ldots.(p-m+1)}{1.\ 2\ldots.\ m}\right\}^k = Z_p,$$

каково бы ни было число p.

При каждомъ тиражѣ нумера вынутыхъ билетовъ могутъ представлять любую совокупность m чиселъ изъ всѣхъ n чиселъ

$$1,\ 2, \ldots .,\ n.$$

Соотвѣтственно этому при одномъ тиражѣ различимъ

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.\ 2\ldots.\ m}$$

равновозможныхъ случаевъ, а при всѣхъ k тиражахъ различимъ

$$\left\{\frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.\ 2\ldots.\ m}\right\}^k = Z_n$$

равновозможныхъ случаевъ.

Каждый изъ послѣднихъ случаевъ, единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ, состоитъ въ появленіи k опредѣленныхъ совокупностей m нумеровъ, при разсматриваемыхъ нами k тиражахъ.

Установивъ такимъ образомъ тѣ случаи, которые мы будемъ разсматривать, и указавъ общее число ихъ, займемся для опредѣленія вѣроятностей событій, упомянутыхъ въ задачѣ, счетомъ числа благопріятствующихъ имъ случаевъ.

Если i опредѣленныхъ нумеровъ

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots .,\ \alpha_i$$

не появляются, то для одного тиража вмѣсто

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.\ 2\ldots.\ m}$$

остается

$$\frac{(n-i)\,(n-i-1)\ldots.(n-i-m+1)}{1.\ 2\ldots.\ m}$$

случаевъ, а для k тиражей вмѣсто

$$\left\{\frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.\ 2\ldots.\ m}\right\}^k = Z_n$$

имѣемъ

$$\left\{\frac{(n-i)\,(n-i-1)\ldots.(n-i-m+1)}{1.\ 2\ldots.\ m}\right\}^k = Z_{n-i}$$

случаевъ.

Слѣдовательно вѣроятность, что при k разсматриваемыхъ нами тиражахъ i опредѣленныхъ нумеровъ не появятся, выражается дробью

$$\frac{Z_{n-i}}{Z_n} = \left\{\frac{(n-i)\,(n-i-1)\ldots.(n-i-m+1)}{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}\right\}^k.$$

Затѣмъ число случаевъ, при которыхъ не появляются i опредѣленныхъ нумеровъ

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots.,\ \alpha_i$$

и появляется одинъ также опредѣленный нумеръ β_1, можно выразить разностью

$$\Delta Z_{n-i-1} = Z_{n-i} - Z_{n-i-1},$$

гдѣ Z_{n-i}, согласно только что сказанному, представляетъ число всѣхъ случаевъ, при которыхъ не появляются нумера

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots.,\ \alpha_i,$$

а Z_{n-i-1} число тѣхъ изъ этихъ случаевъ, при которыхъ кромѣ нумеровъ

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots.,\ \alpha_i$$

не появляется также и нумеръ β_1.

Подобнымъ же образомъ число случаевъ, при которыхъ не

появляются i опредѣленныхъ нумеровъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$$

и появляются два опредѣленныхъ нумера, можно выразить второю разностью

$$\Delta^2 Z_{n-i-2} = \Delta Z_{n-i-1} - \Delta Z_{n-i-2},$$

гдѣ ΔZ_{n-i-1} представляетъ число всѣхъ случаевъ, при которыхъ появляется нумеръ β_1 и не появляются нумера

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i,$$

а ΔZ_{n-i-2} число тѣхъ изъ этихъ случаевъ, при которыхъ кромѣ нумеровъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$$

не появляется также нумеръ β_2.

Въ виду возможности продолженія подобныхъ разсужденій не трудно заключить, что, вообще, число случаевъ, при которыхъ не появляются i опредѣленныхъ нумеровъ и появляются другіе l опредѣленныхъ нумеровъ, можно представить разностью $l^{\text{го}}$ порядка

$$\Delta^l Z_{n-i-l},$$

которая равна

$$Z_{n-i} - \frac{l}{1} Z_{n-i-1} + \frac{l(l-1)}{1.\ 2} Z_{n-i-2} - \ldots \pm Z_{n-i-l}.$$

Итакъ вѣроятность, что при k разсматриваемыхъ нами тиражахъ i опредѣленныхъ нумеровъ не появятся, а другіе l опредѣленныхъ нумеровъ появятся, равна

$$\frac{\Delta^l Z_{n-i-l}}{Z_n}.$$

Прочія вѣроятности, упомянутыя въ задачѣ, представляютъ три частныхъ случая только что найденной вѣроятности и потому могутъ быть получены изъ выраженія

$$\frac{\Delta^l Z_{n-i-l}}{Z_n}$$

при частныхъ предположеніяхъ относительно i и l:

$$1)\ i=0,\quad 2)\ i=n-l,\quad 3)\ i=0,\ l=n.$$

Полагая $i=0$, получаемъ нижеслѣдующее выраженіе вѣроятности появленія l опредѣленныхъ нумеровъ:

$$\frac{\Delta^l Z_{n-l}}{Z_n}=1-\frac{l}{1}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k+\frac{l(l-1)}{1.\,2}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k-\ldots.$$

Полагая же $i=n-l$, находимъ, что вѣроятность появленія l опредѣленныхъ нумеровъ и не появленія остальныхъ равна

$$\frac{\Delta^l Z_0}{Z_n}=\frac{Z_l}{Z_n}-\frac{l}{1}\frac{Z_{l-1}}{Z_n}+\frac{l(l-1)}{1.\,2}\frac{Z_{l-2}}{Z_n}-\ldots.$$

$$=\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k\ldots\left(\frac{l-m+1}{l+1}\right)^k\left\{1-\frac{l}{1}\left(\frac{l-m}{l}\right)^k+\ldots\right\}.$$

Наконецъ вѣроятность появленія всѣхъ n нумеровъ равна

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n}=1-\frac{n}{1}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k+\frac{n(n-1)}{1.\,2}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k-\ldots.$$

Останавливаясь на послѣдней формулѣ и замѣчая, что при большихъ значеніяхъ n она требуетъ утомительныхъ вычисленій, выведемъ изъ нея двѣ приближенныхъ формулы.

Для полученія первой приближенной формулы положимъ, что всѣ числа

$$\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k,\quad\left(\frac{n-m-2}{n-2}\right)^k,\ldots$$

равны числу

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^k,$$

которое для краткости обозначимъ буквою t.

При такомъ допущеніи указанная формула тотчасъ даетъ

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n}\mp(1-t)^n,$$

гдѣ

$$t=\left(\frac{n-m}{n}\right)^k.$$

Для второго приближенія замѣтимъ, что при небольшихъ значеніяхъ i отношеніе

$$\left(\frac{n-m-i}{n-i}\right)^k : \left(\frac{n-m}{n}\right)^k,$$

равное

$$\left\{1-\frac{im}{(n-i)\,(n-m)}\right\}^k,$$

мало отличается отъ

$$1-\frac{kim}{n(n-m)}$$

и произведеніе

$$\left(1-\frac{km}{n\,(n-m)}\right)\left(1-\frac{2km}{n\,(n-m)}\right)\ldots\left(1-\frac{ikm}{n\,(n-m)}\right)$$

мало отличается отъ

$$1-\frac{km\,(1+2+\ldots.+i)}{n\,(n-m)}=1-\frac{kmi\,(i+1)}{2n\,(n-m)}.$$

На этомъ основаніи за приближенную величину каждаго произведенія

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k\ldots.\left(\frac{n-m-i}{n-i}\right)^k$$

мы примемъ

$$t^{i+1}\left(1-\frac{kmi\,(i+1)}{2n\,(n-m)}\right).$$

Подставляя въ формулу это приближенное выраженіе вмѣсто точнаго, получаемъ

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n} \mp (1-t)^n-\frac{kmt^2\,(n-1)}{2\,(n-m)}\,(1-t)^{n-2} \mp (1-t)^n\left\{1-\frac{kmt^2}{2}\right\},$$

такъ какъ числа

$$\frac{n-1}{n-m} \text{ и } \frac{1}{(1-t)^2}$$

мы предполагаемъ близкими къ единицѣ.

Приложимъ наши приближенныя формулы къ розысканію числа тиражей по условію, чтобы вѣроятность появленія всѣхъ нумеровъ была приблизительно равна данному числу $\frac{1}{C}$.

Первая приближенная формула даетъ:

$$(1-t)^n \doteq \frac{1}{C},$$

откуда выводимъ

$$n\log(1-t) \doteq -nt \doteq -\log C;$$

но

$$t = \left(\frac{n-m}{n}\right)^k$$

и потому

$$\log t = k\log\left(1-\frac{m}{n}\right) \doteq -\frac{km}{n}.$$

Сопоставляя же приближенныя равенства

$$-nt \doteq -\log C \quad \text{и} \quad \log t \doteq -\frac{km}{n},$$

находимъ

$$k \doteq \frac{n(\log n - \log\log C)}{m}.$$

Въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ положимъ

$$\frac{\log C}{n} = t_0 \quad \text{и} \quad \frac{n(\log n - \log\log C)}{m} = k_0;$$

такъ что t_0 и k_0 будутъ приближенными значеніями чиселъ t и k.

Второе приближенное выраженіе вѣроятности даетъ

$$(1-t)^n\left(1-\frac{kmt^2}{2}\right) \doteq \frac{1}{C},$$

откуда, производя приближенныя вычисленія, выводимъ

$$\log C \doteq nt + \frac{nt^2}{2} + \frac{kmt^2}{2} \doteq nt + \frac{(n+k_0m)\,t_0^2}{2},$$

$$t \doteq \frac{\log C}{n}\left[1-\frac{(n+k_0m)\,t_0^2}{2\log C}\right]$$

и затѣмъ

$$-\log t \doteq \log n - \log\log C + \frac{(n+k_0m)\,t_0^2}{2\log C}.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$-\log t = -k\log\left(1-\frac{m}{n}\right) \doteq \frac{km}{n} + \frac{k_0m^2}{2n^2}.$$

Приравнивая наконецъ одно приближенное выраженіе $\log t$ другому, приходимъ къ такому приближенному равенству

$$\frac{km}{n}+\frac{k_0 m^2}{2n^2} \doteq \log n - \log\log C + \frac{(n+k_0 m)\log C}{2n^2},$$

изъ котораго легко выводимъ

$$k \doteq \frac{n}{m}\left\{\log n - \log\log C + \frac{k_0 m}{2n^2}(\log C - m) + \frac{1}{2n}\log C\right\}$$

$$\doteq \frac{1}{m}\left\{(\log n - \log\log C)\left(n+\frac{1}{2}\log C - \frac{m}{2}\right) + \frac{1}{2}\log C\right\}.$$

Для примѣра положимъ

$$n = 90,\ m = 5,\ C = 2.$$

Тогда

$$\log n = \quad 4{,}4998\ldots., \qquad \log C = \ 0{,}69314\ldots.$$

$$\log\log C = -0{,}3665\ldots\ ,\quad n+\frac{1}{2}\log C - \frac{m}{2} = 87{,}84657\ldots.$$

и произведя простыя выкладки, по послѣдней приближенной формулѣ получаемъ

$$k \doteq \frac{4{,}8663 \times 87{,}8466 + 0{,}346}{5} \doteq 85{,}5.$$

Соотвѣтственно этому результату можно убѣдиться, что вѣроятность появленія всѣхъ 90 нумеровъ при 85 тиражахъ нѣсколько меньше половины, а при 86 тиражахъ уже больше половины.

§ 21. *Задача 4ᵐ*. Два игрока, которыхъ мы назовемъ L и M, играютъ въ нѣкоторую игру, состоящую изъ послѣдовательныхъ партій.

Каждая отдѣльная партія должна окончиться для одного изъ двухъ игроковъ L и M выигрышемъ ея, а для другого проигрышемъ, при чемъ вѣроятность выиграть ее для L равна p, а для M равна $q = 1 - p$, независимо отъ результатовъ другихъ партій.

Вся игра окончится, когда L выиграетъ l партій или M

выиграетъ m партій: въ первомъ случаѣ игру выиграетъ L, а во второмъ M.

Требуется опредѣлить вѣроятности выиграть игру для игрока L и для игрока M, которыя мы обозначимъ символами (L) и (M).

Эта задача извѣстна съ половины семнадцатаго столѣтія и заслуживаетъ особаго вниманія, такъ какъ въ различныхъ пріемахъ, предложенныхъ Паскалемъ и Ферматомъ для ея рѣшенія, можно видѣть начало исчисленія вѣроятностей.

Первое рѣшеніе. Прежде всего замѣтимъ, что игра можетъ быть выиграна игрокомъ L въ различное число партій, не меньшее l и не большее $l+m-1$.

Поэтому, въ силу теоремы сложенія вѣроятностей, мы можемъ представить искомую вѣроятность (L) въ видѣ суммы

$$(L)_l + (L)_{l+1} + \ldots + (L)_{l+i} + \ldots + (L)_{l+m-1},$$

гдѣ $(L)_{l+i}$ означаетъ вообще вѣроятность, что игра окончится въ $l+i$ партій выигрышемъ игрока L.

А для того, чтобы игра была выиграна игрокомъ L въ $l+i$ партій, этотъ игрокъ долженъ выиграть $l+i^{ую}$ партію и изъ предыдущихъ $l+i-1$ партій долженъ выиграть ровно $l-1$ партій.

Слѣдовательно, по теоремѣ умноженія вѣроятностей величина $(L)_{l+i}$ должна равняться произведенію вѣроятности игроку L выиграть $l+i^{ую}$ партію на вѣроятность выиграть тому же игроку L изъ $l+i-1$ партій ровно $l-1$ партій.

Послѣдняя вѣроятность, очевидно, совпадаетъ съ вѣроятностью, что въ $l+i-1$ независимыхъ испытаній появится ровно $l-1$ разъ такое событіе, вѣроятность котораго для каждаго испытанія равна p.

Вѣроятность же игроку L выиграть $l+i^{ую}$ партію, какъ вѣроятность выиграть ему любую партію, равна p.

Итакъ

$$(L)_{l+i} = p\frac{1.\ 2.\ldots(l+i-1)}{1.\ 2.\ldots i.\ 1.\ 2.\ldots(l-1)}p^{l-1}q^i = \frac{l(l+1)\ldots(l+i-1)}{1.\ 2.\ldots i}p^l q^i$$



и наконецъ

$$(L)=p^l\left\{1+\frac{l}{1}q+\frac{l(l+1)}{1.\ 2}q^2+\ldots+\frac{l(l+1)\ldots(l+m-2)}{1.\ 2\ldots(m-1)}q^{m-1}\right\}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$(M)=q^m\left\{1+\frac{m}{1}p+\frac{m(m+1)}{1.\ 2}p^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+l-2)}{1.\ 2\ldots(l-1)}p^{l-1}\right\}.$$

Достаточно, впрочемъ, вычислить одну изъ этихъ величинъ, такъ какъ сумма ихъ

$$(L)+(M)$$

должна приводиться къ единицѣ.

Второе рѣшеніе. Замѣчая, что для окончанія игры требуется не болѣе $l+m-1$ партій, положимъ, что игроки не прекращаютъ ее тотчасъ по достиженіи однимъ изъ нихъ надлежащаго числа выигранныхъ партій, а продолжаютъ играть до тѣхъ поръ, пока не будетъ сыграно ровно $l+m-1$ партій.

При такомъ предположеніи вѣроятность выиграть игру для игрока L равняется вѣроятности выиграть, тому же игроку L, изъ всѣхъ $l+m-1$ партій не менѣе l партій.

Въ самомъ дѣлѣ, если игра выиграна игрокомъ L, то число выигранныхъ имъ партій достигаетъ величины l и послѣдующія затѣмъ партіи могутъ только увеличить это число, или оставить его безъ измѣненія.

И обратно, если изъ $l+m-1$ партій игрокъ L выиграетъ не менѣе l партій, то число партій, выигранныхъ игрокомъ M, будетъ меньше m; откуда слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ игрокъ L выиграетъ l партій, прежде чѣмъ игрокъ M успѣетъ выиграть m партій, и такимъ образомъ игра будетъ выиграна игрокомъ L.

Съ другой стороны, вѣроятность игроку L выиграть изъ $l+m-1$ партій не менѣе l партій совпадаетъ съ вѣроятностью, что въ $l+m-1$ независимыхъ испытаній появится не менѣе l разъ такое событіе, вѣроятность котораго при каждомъ испытаніи равна p.

Послѣдняя же вѣроятность выражается извѣстною суммою произведеній

$$\frac{1.\ 2\ldots.(l+m-1)}{1.\ 2\ldots.\ (l+i)\ 1.\ 2\ldots.\ (m-i-1)}p^{l+i}q^{m-i-1},$$

гдѣ

$$i=0,\ 1,\ 2,\ldots.,\ m-1.$$

Итакъ

$$(L)=\frac{(l+m-1)\ldots.\ m}{1.\ 2\ldots.\ l}p^l q^{m-1}\left\{1+\frac{m-1}{l+1}\cdot\frac{p}{q}+\frac{m-1}{l+1}\cdot\frac{m-2}{l+2}\cdot\frac{p^2}{q^2}+\ldots.\right\};$$

совершенно также найдемъ

$$(M)=\frac{(l+m-1)\ldots.\ l}{1.\ 2\ldots.\ m}p^{l-1}q^m\left\{1+\frac{l-1}{m+1}\cdot\frac{q}{p}+\frac{l-1}{m+1}\cdot\frac{l-2}{m+2}\cdot\frac{q^2}{p^2}+\ldots.\right\}.$$

Нетрудно убѣдиться, что эти новыя выраженія (L) и (M) равны найденнымъ прежде.

Численные примѣры.

$$1)\ p=q=\frac{1}{2},\ l=1,\ m=2.$$

$$(L)=p(1+q)=2pq\left(1+\frac{1}{2}\ \frac{p}{q}\right)=\frac{3}{4},$$

$$(M)=q^2=\frac{1}{4}.$$

$$2)\ p=\frac{2}{5},\quad q=\frac{3}{5},\ l=2,\quad m=3.$$

$$(L)=p^2\left\{1+2q+3q^2\right\}=6p^2q^2\left\{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{q}+\frac{1}{6}\ \frac{p^2}{q^2}\right\}=\frac{328}{625}$$

$$(M)=q^3\left\{1+3p\right\}=4q^3p\left\{1+\frac{1}{4}\ \frac{q}{p}\right\}=\frac{297}{625}.$$

Задача 5[ая]. Три игрока

$$L,\ M,\ N$$

играютъ въ игру, состоящую изъ послѣдовательныхъ партій.

Каждая партія должна окончиться для одного изъ нихъ выигрышемъ, а для двухъ остальныхъ проигрышемъ, при чемъ вѣроятности выиграть ее для

$$L,\ M,\ N$$

соотвѣтственно равны

$$p,\ q,\ r,$$

независимо отъ результатовъ другихъ партій.

Вся игра оканчивается выигрышемъ одного изъ игроковъ: именно, игру выигрываетъ тотъ, кто прежде другихъ выиграетъ назначенное для него число партій.

Опредѣлить вѣроятность выиграть игру для каждаго изъ игроковъ, если для выигрыша игры L долженъ выиграть l партій, M долженъ выиграть m партій и N долженъ выиграть n партій.

Эта задача представляетъ распространеніе предыдущей на случай трехъ игроковъ.

Рѣшеніе. Разсматривая различныя стадіи игры, обозначимъ символомъ

$$L_{x,\ y,\ z}$$

вѣроятность, что игру выиграетъ L, когда игрокамъ

$$L,\ M,\ N$$

для выигрыша игры остается выиграть соотвѣтственно

$$x,\ y,\ z$$

партій.

Пока игра не окончена, ни одно изъ чиселъ x, y, z не нуль.

Обращеніе же одного изъ нихъ въ нуль указываетъ на окончаніе игры: при $x = 0$ игра выиграна игрокомъ L и тогда вѣроятность выигрыша игры для L равна 1; если же $y = 0$ или $z = 0$, то игра выиграна однимъ изъ двухъ другихъ игроковъ и вѣроятность выиграть ее для L равна 0.

Соотвѣтственно этому имѣемъ

$$L_{0,\ y,\ z} = 1,\ L_{x,\ 0,\ z} = L_{x,\ y,\ 0} = 0,$$

гдѣ подъ x, y, z мы подразумѣваемъ числа неравныя нулю, такъ какъ выраженія

$$L_{0,\ 0,\ z},\ L_{0,\ y,\ 0},\ L_{x,\ 0,\ 0},$$

не имѣющія смысла, не встрѣчаются въ нашихъ вычисленіяхъ.

Предполагая всѣ три числа x, y, z отличными отъ нуля, установимъ теперь простую связь между величинами

$$L_{x, y, z}, \ L_{x-1, y, z}, \ L_{x, y-1, z}, \ L_{x, y, z-1},$$

которая даетъ возможность найти $L_{x, y, z}$, когда значенія

$$L_{x-1, y, z}, \ L_{x, y-1, z} \ \text{ и } \ L_{x, y, z-1}$$

уже извѣстны.

Для намѣченной цѣли разсмотримъ возможные результаты одной партіи, которая непосредственно слѣдуетъ за тѣмъ положеніемъ игры, когда игрокамъ

$$L, M, N$$

для выигрыша игры остается выиграть соотвѣтственно

$$x, y, z$$

партій.

Если эта партія будетъ выиграна игрокомъ L, вѣроятность чего равна p, то непосредственно по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L обратится въ

$$L_{x-1, y, z};$$

если же эта партія будетъ выиграна игрокомъ M, вѣроятность чего равна q, то по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L обратится въ

$$L_{x, y-1, z};$$

и наконецъ если эта партія будетъ выиграна игрокомъ N, вѣроятность чего равна r, то по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L будетъ равна

$$L_{x, y, z-1}.$$

Поэтому, выигрышъ игры игрокомъ L, когда для окончанія

игры игрокамъ

$$L,\ M,\ N$$

остается выиграть соотвѣтственно

$$x,\ y,\ z$$

партій, мы можемъ разбить на три вида, которые отличаются другъ отъ друга результатомъ одной партіи и вѣроятности которыхъ равны произведеніямъ

$$pL_{x-1,\ y,\ z},\ qL_{x,\ y-1,\ z},\ rL_{x,\ y,\ z-1}.$$

Слѣдовательно въ силу теоремы сложенія вѣроятностей имѣемъ

$$L_{x,\ y,\ z} = pL_{x-1,\ y,\ z} + qL_{x,\ y-1,\ z} + rL_{x,\ y,\ z-1}.$$

Подобнымъ же образомъ не трудно установить равенства

$$M_{x,\ y,\ z} = pM_{x-1,\ y,\ z} + qM_{x,\ y-1,\ z} + rM_{x,\ y,\ z-1},$$

$$N_{x,\ y,\ z} = pN_{x-1,\ y,\ z} + qN_{x,\ y-1,\ z} + rN_{x,\ y,\ z-1},$$

$$M_{0,\ y,\ z} = M_{x,\ y,\ 0} = 0,\ M_{x,\ 0,\ z} = 1,$$

$$N_{0,\ y,\ z} = N_{x,\ 0,\ z} = 0,\ N_{x,\ y,\ 0} = 1,$$

гдѣ

$$M_{x,\ y,\ z} \text{ и } N_{x,\ y,\ z}$$

означаютъ вѣроятности выиграть игру игрокамъ M и N, когда для окончанія игры игрокамъ

$$L,\ M,\ N$$

остается выиграть соотвѣтственно

$$x,\ y,\ z$$

партій.

Не останавливаясь затѣмъ на составленіи общихъ формулъ для выраженія искомыхъ вѣроятностей

$$L_{l,\ m,\ n},\ M_{l,\ m,\ n},\ N_{l,\ m,\ n}$$

при произвольныхъ значеніяхъ l, m, n, замѣтимъ только, что указанныя нами равенства даютъ возможность найти эти вѣроятности для любой данной системы чиселъ l, m, n.

Дѣйствительно, при помощи этихъ равенствъ, послѣдовательно находимъ

$$L_{1,1,1}=p, \qquad M_{1,1,1}=q,\ N_{1,1,1}=r$$

$$L_{1,1,2}=pL_{0,1,2}+qL_{1,0,2}+rL_{1,1,1}=p+rp$$

$$L_{1,2,1}=p+qp,\ L_{2,1,1}=p^2$$

$$M_{1,1,2}=q+rq,\ M_{2,1,1}=q+pq,\ M_{1,2,1}=q^2$$

$$N_{1,1,2}=r^2,\ N_{1,2,1}=r+qr,\ N_{2,1,1}=r+pr$$

$$L_{1,1,3}=pL_{0,1,3}+qL_{1,0,3}+rL_{1,1,2}=p+r(p+rp)$$
$$=p(1+r+r^2)$$

$$L_{1,2,2}=pL_{0,2,2}+qL_{1,1,2}+rL_{1,2,1}=p+q(p+rp)+r(p+qp)$$
$$=p(1+q+r+2qr)$$

$$L_{2,1,2}=pL_{1,1,2}+qL_{2,0,2}+rL_{2,1,1}=p(p+rp)+p^2r=p^2(1+2r)$$

$$L_{1,3,1}=p(1+q+q^2),\ L_{2,2,1}=p^2(1+2q)$$

$$L_{3,1,1}=pL_{2,1,1}+qL_{3,0,1}+rL_{3,1,0}=p^3$$

$$M_{1,1,3}=q(1+r+r^2),\ M_{1,2,2}=q^2(1+2r),\ M_{1,3,1}=q^3$$

$$M_{2,2,1}=q^2(1+2p),\ M_{2,1,2}=q(1+p+r+2pr),$$
$$M_{3,1,1}=q(1+p+p^2)$$

$$N_{1,1,3}=r^3,\ N_{1,2,2}=r^2(1+2q),\ N_{1,3,1}=r(1+q+q^2)$$

$$N_{2,2,1}=r(1+p+q+2pq),\ N_{2,1,2}=r^2(1+2p),$$
$$N_{3,1,1}=r(1+p+p^2)$$

$$L_{1,2,3}=pL_{0,2,3}+qL_{1,1,3}+rL_{1,2,2}$$
$$=p+qp(1+r+r^2)+rp(1+q+r+2qr)$$
$$=p(1+q+r+r^2+2qr+3qr^2)$$

и т. д.

Примѣръ. $l=1,\ m=2,\ n=3,\ p=q=r=\frac{1}{3}$.

Вѣроятность выиграть игру для игрока L равна

$$L_{1,2,3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{19}{27};$$

затѣмъ вѣроятность выиграть ее для игрока M равна

$$M_{1,2,3}=qM_{1,1,3}+rM_{1,2,2}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\right)=\frac{6}{27},$$

и наконецъ для третьяго игрока вѣроятность выиграть игру равна

$$1-\frac{19}{27}-\frac{6}{27}=\frac{2}{27}.$$

Ограничиваясь частнымъ случаемъ, приведемъ другой выводъ искомыхъ вѣроятностей.

Именно, прежде всего замѣтимъ, что для окончанія игры, при

$$l=1,\quad m=2,\quad n=3,$$

потребуется не болѣе четырехъ партій и затѣмъ для установленія равновозможныхъ случаевъ положимъ, что игроки сыграютъ четыре партіи, хотя бы игра и была уже выиграна раньше тѣмъ или другимъ изъ нихъ.

Тогда, имѣя въ виду порядокъ этихъ партій и три возможныхъ результата каждой партіи, состоящіе въ выигрышѣ ея однимъ изъ трехъ игроковъ, мы можемъ различить $3^4=81$ равновозможныхъ случаевъ.

Изъ этихъ 81 случаевъ благопріятствуютъ выигрышу игры игрокомъ L тѣ, въ которыхъ онъ выигрываетъ одну партію прежде чѣмъ M выигрываетъ двѣ партіи и прежде чѣмъ N выигрываетъ три партіи.

Прямой счетъ числа такихъ случаевъ не представляетъ затрудненій; но еще скорѣе можно сосчитать число остальныхъ случаевъ, неблагопріятствующихъ выигрышу игры игрокомъ L.

Именно, не благопріятствуютъ выигрышу игры игрокомъ L, кромѣ $2^4=16$ случаевъ, въ которыхъ онъ не выигрываетъ ни одной партіи, только слѣдующіе 8 случаевъ:

$$NNNL,\ MMML,\ MMNL,\ MNML,$$

$$NMML,\ MMLN,\ MMLM,\ MMLL,$$

въ которыхъ игрокъ L выигрываетъ первую партію уже послѣ выигрыша игры однимъ изъ своихъ противниковъ.

Отсюда тотчасъ заключаемъ, что вѣроятность выиграть игру для игрока L равна

$$\frac{81-24}{81}=\frac{57}{81}=\frac{19}{27}.$$

Затѣмъ не трудно видѣть, что игрокъ N выигрываетъ игру въ шести случаяхъ:

$$NNNN,\ NNNL,\ NNNM,\ NNMN,\ NMNN,\ MNNN;$$

и потому остальные

$$24-6=18$$

случаевъ должны благопріятствовать выигрышу игры игрокомъ M.

Слѣдовательно вѣроятности выиграть игру для игроковъ M и N соотвѣтственно равны

$$\frac{18}{81}=\frac{2}{9} \text{ и } \frac{6}{81}=\frac{2}{27},$$

согласно прежнему выводу.

§ 22. *Задача 6*[ая]. Двое

$$L \text{ и } M$$

играютъ въ игру, состоящую изъ послѣдовательныхъ партій.

Каждая партія должна окончиться для одного изъ нихъ выигрышемъ, а для другого проигрышемъ, при чемъ вѣроятности выиграть ее для L и M соотвѣтственно равны p и $q=1-p$.

Конецъ игры опредѣляется разностью между числомъ пар-

тій, выигранныхъ однимъ игрокомъ, и числомъ партій, выигранныхъ другимъ игрокомъ.

Именно, игру выиграетъ L, какъ только число выигранныхъ имъ партій превыситъ число партій, выигранныхъ игрокомъ M, на a единицъ; напротивъ игру выиграетъ M, какъ только число выигранныхъ имъ партій превыситъ число партій, выигранныхъ игрокомъ L, на b единицъ.

Требуется вычислить вѣроятности выиграть игру для L и для M.

Примѣчаніе. Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію поставленной задачи, представимъ условіе окончанія игры въ другой формѣ.

Пусть капиталы L и M выражаются соотвѣтственно числами b и a; пусть вмѣстѣ съ тѣмъ за каждую партію выигравшій ее получаетъ отъ проигравшаго одну единицу капитала.

Тогда окончаніе игры обусловливается разореніемъ одного изъ игроковъ и выигрываетъ ее тотъ, кому удастся разорить противника.

Дѣйствительно, если будетъ сыграно $i+j$ партій и изъ нихъ будетъ выиграно i партій игрокомъ L и j партій игрокомъ M; то въ силу установленнаго нами условія капиталы L и M обратятся соотвѣтственно въ

$$b+i-j \quad \text{и} \quad a+j-i$$

единицъ капитала.

И если эти $i+j$ партій приведутъ игру къ концу, то должно быть

$$i-j=a, \quad \text{или} \quad j-i=b$$

и соотвѣтственно

$$a+j-i=0, \quad \text{или} \quad b+i-j=0.$$

Рѣшеніе. Разсматривая различныя стадіи игры и имѣя въ виду вторую форму условія окончанія ея, обозначимъ символомъ y_x вѣроятность выиграть игру для игрока L въ то время, когда его капиталъ выражается числомъ x.

Число x, въ теченіе игры, можетъ принимать только такія значенія

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, a+b;$$

а въ началѣ игры x равно b и потому искомая нами вѣроятность выиграть игру игроку L, пока не сыграно ни одной партіи, представляется при установленномъ нами обозначеніи символомъ

$$y_b.$$

Замѣтимъ, что игра оканчивается при $x=0$ и при $x=a+b$ и что

y_0 равно нулю, а y_{a+b} равно единицѣ;

такъ какъ обращеніе капитала L въ нуль указываетъ на проигрышъ имъ игры, соединеніе же у игрока L капиталовъ обоихъ игроковъ влечетъ за собою выигрышъ имъ игры.

Предполагая затѣмъ x отличнымъ отъ 0 и отъ $a+b$, установимъ простую связь между величинами

$$y_x,\ y_{x+1} \text{ и } y_{x-1}.$$

Для этой цѣли разсмотримъ возможные результаты одной партіи, которая непосредственно слѣдуетъ за тѣмъ положеніемъ игры, когда капиталъ L выражается числомъ x.

Если эта партія будетъ выиграна игрокомъ L, вѣроятность чего равна p, то непосредственно по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L обратится въ y_{x+1}; если же эта партія будетъ выиграна игрокомъ M, вѣроятность чего равна q, то по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L обратится въ y_{x-1}.

Отсюда не трудно заключить, что въ силу теоремъ сложенія и умноженія вѣроятностей должно быть

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}.$$

Такимъ образомъ разысканіе y_x сводится къ рѣшенію линейнаго уравненія

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}$$

при условіяхъ

$$y_0 = 0 \quad \text{и} \quad y_{a+b} = 1.$$

Рѣшеніе подобныхъ уравненій излагается въ исчисленіи конечныхъ разностей.

Согласно выводамъ исчисленія конечныхъ разностей общее рѣшеніе уравненія

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}$$

опредѣляется корнями обыкновеннаго уравненія второй степени

$$\xi = p\xi^2 + q,$$

при чемъ слѣдуетъ различить два случая.

Въ силу равенства

$$p + q = 1$$

одинъ изъ корней уравненія

$$\xi = p\xi^2 + q$$

равенъ единицѣ, а другой $\frac{q}{p}$.

Если p не равно q, то числа

$$1 \quad \text{и} \quad \frac{q}{p}$$

различны между собой и на основаніи выводовъ исчисленія конечныхъ разностей должно быть

$$y_x = C + D\left(\frac{q}{p}\right)^x,$$

гдѣ C и D числа постоянныя.

Для опредѣленія постоянныхъ имѣемъ два уравненія

$$y_0 = 0 \quad \text{и} \quad y_{a+b} = 1,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$C = -D = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

Итакъ

$$y_x = \frac{p^{a+b-x}(p^x - q^x)}{p^{a+b} - q^{a+b}}$$

и

$$y_b = \frac{p^a(p^b - q^b)}{p^{a+b} - q^{a+b}},$$

если только p не равно q.

Если же $p = q$, то

$$y_x = A + Bx,$$

гдѣ A и B числа постоянныя.

Для опредѣленія постоянныхъ имѣемъ по прежнему два уравненія

$$y_0 = 0 \quad \text{и} \quad y_{a+b} = 1,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{a+b}.$$

Итакъ при $p = q$ находимъ

$$y_x = \frac{x}{a+b} \quad \text{и} \quad y_b = \frac{b}{a+b}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что для игрока M вѣроятность выиграть игру, пока не сыграно ни одной партіи, равна

$$\frac{q^b(q^a - p^a)}{q^{a+b} - p^{a+b}} = \frac{q^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}},$$

если только p не равно q, и обращается въ

$$\frac{a}{a+b}$$

при $p = q$.

Сумма вѣроятностей выиграть игру тому и другому игроку составляетъ единицу; какъ и слѣдовало ожидать, такъ какъ по предположенію игра продолжается до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ игроковъ не выиграетъ ея.

Однако въ данномъ случаѣ вѣроятность равная единицѣ не указываетъ на достовѣрность выигрыша игры тѣмъ или дру-

гимъ изъ игроковъ; такъ какъ игра можетъ продолжаться безъ конца.

Каждая партія въ отдѣльности представляетъ безобидную игру при $p=q$ и не безобидную въ противномъ случаѣ, когда p не равно q.

Сообразно этому, найденное нами выраженіе y_b при $p=q$ приводитъ къ слѣдующему заключенію.

Если нѣкто рѣшилъ повторять безобидную игру до пріобрѣтенія назначенной напередъ суммы или до своего разоренія и если къ такому повторенію нѣтъ препятствій; то вѣроятности пріобрѣтенія имъ назначенной суммы и его разоренія обратно пропорціональны величинѣ этой суммы и его капиталу.

Это заключеніе, выведенное нами изъ разсмотрѣнія одного частнаго случая, относится ко всѣмъ безобиднымъ играмъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если капиталъ игрока выражается числомъ a, сумма же, пріобрѣтеніе которой составляетъ цѣль многократнаго повторенія имъ игры, выражается числомъ b; то при сдѣланныхъ нами предположеніяхъ многократное повтореніе игры должно дать игроку прибыль, выражаемую числомъ b, или убытокъ, величина котораго выражается числомъ a.

И потому математическое ожиданіе прибыли игрока отъ такого повторенія игры выразится разностью

$$Xb - Ya,$$

гдѣ X вѣроятность пріобрѣтенія назначенной суммы, Y вѣроятность разоренія игрока.

Но повтореніе безобидной игры само должно представлять также игру безобидную; слѣдовательно

$$Xb - Ya = 0,$$

откуда находимъ

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{X+Y}{a+b} = \frac{1}{a+b}.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда сумма, по пріобрѣтеніи которой

игрокъ рѣшилъ прекратить игру, велика по сравненію съ его капиталомъ, вѣроятность разоренія игрока близка къ единицѣ.

Въ предѣльномъ же случаѣ, когда игрокъ не довольствуется никакою суммою, должно положить $b = \infty$ и вѣроятность разоренія обращается въ единицу.

Итакъ, если повтореніе безобидной игры ограничено только разореніемъ игрока, то по найденной нами формулѣ вѣроятность разоренія равна единицѣ, хотя это разореніе можетъ никогда не наступить.

Устраняя вѣчную игру, ограничимъ теперь число играемыхъ партій; мы преобразуемъ такимъ образомъ задачу 6[ую] въ слѣдующую.

Задача 7ая. При соблюденіи всѣхъ условій задачи 6ой, требуется вычислить вѣроятность, что игра будетъ выиграна игрокомъ L не позже, какъ въ n партій.

Другими словами, требуется вычислить вѣроятность разоренія игрока M при условіи, что общее число партій не превзойдетъ n.

Рѣшеніе. Обозначимъ символомъ

$$y_{t,\,s}$$

вѣроятность выиграть игру игроку L въ томъ случаѣ, когда капиталъ M выражается числомъ t и нельзя сыграть болѣе s партій.

При такихъ обозначеніяхъ искомая нами вѣроятность разоренія игрока M представится символомъ

$$y_{a,\,n};$$

вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$y_{0,\,s} = 1, \quad y_{a+b,\,s} = 0 \quad \text{и} \quad y_{t,\,0} = 0,$$

гдѣ

$$s \geqq 0 \quad \text{и} \quad t > 0.$$

Съ другой стороны, разсматривая, подобно прежнему, возможные результаты одной партіи, легко приходимъ къ уравненію

$$y_{t,\,s} = p y_{t-1,\,s-1} + q y_{t+1,\,s-1},$$

гдѣ

$$s \overline{\gtrless} 1 \quad \text{и} \quad 0 < t < a + b.$$

Остается рѣшить это уравненіе при вышеуказанныхъ условіяхъ

$$y_{0,\,s} = 1,\ y_{a+b,\,s} = 0,\ y_{t,\,0} = 0.$$

Пользуясь способомъ Лапласа, мы сведемъ разысканіе $y_{t,s}$ къ разложенію нѣкоторой функціи вспомогательнаго перемѣннаго ξ по степенямъ этого перемѣннаго.

Пусть

$$\varphi_t(\xi) = y_{t,\,0} + y_{t,\,1}\,\xi + y_{t,\,2}\,\xi^2 + \ldots + y_{t,\,s}\,\xi^s + \ldots$$

Тогда

$$\varphi_{t+1}(\xi) = y_{t+1,\,0} + y_{t+1,\,1}\,\xi + \ldots + y_{t+1,\,s-1}\,\xi^{s-1} + \ldots$$

и

$$\varphi_{t-1}(\xi) = y_{t-1,\,0} + y_{t-1,\,1}\,\xi + \ldots + y_{t-1,\,s-1}\,\xi^{s-1} + \ldots$$

и въ силу уравненія

$$y_{t,\,s} = p y_{t-1,\,s-1} + q y_{t+1,\,s-1}$$

имѣемъ

$$\varphi_t(\xi) - p\xi\varphi_{t-1}(\xi) - q\xi\varphi_{t+1}(\xi) = y_{t,\,0} = 0,$$

при

$$t \overline{\gtrless} 1.$$

На этомъ основаніи, согласно общимъ выводамъ исчисленія конечныхъ разностей, можемъ положить

$$\varphi_t(\xi) = U\theta^t + V\eta^t,$$

гдѣ U и V функціи одного числа ξ, не зависящія отъ t, величины же θ и η опредѣляются равенствами

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pq\xi^2}}{2q\xi} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq\xi^2}}{2q\xi},$$

какъ два корня одного и того же уравненія

$$\rho - p\xi - q\xi\rho^2 = 0,$$

второй степени относительно неизвѣстнаго числа ρ.

Давая затѣмъ t значенія 0 и $a+b$, получаемъ два равенства

$$\frac{1}{1-\xi} = U + V, \quad 0 = U\theta^{a+b} + V\eta^{a+b},$$

изъ которыхъ выводимъ

$$U = \frac{-\eta^{a+b}}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi}$$

и

$$V = \frac{\theta^{a+b}}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi},$$

и на этомъ основаніи находимъ

$$\varphi_t(\xi) = \frac{(\theta\eta)^t\,[\theta^{a+b-t} - \eta^{a+b-t}]}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi}$$

$$= \frac{\eta^t}{1-\xi} \frac{1 - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{a+b-t}}{1 - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{a+b}} = \frac{\eta^t}{1-\xi} \frac{1 - \alpha^{a+b-t}\,\eta^{2(a+b-t)}}{1 - \alpha^{a+b}\,\eta^{2(a+b)}},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{1}{\theta\eta} = \frac{q}{p}.$$

Итакъ искомая нами вѣроятность, обозначенная символомъ $y_{a,\,n}$, можетъ быть опредѣлена какъ коэффиціентъ при ξ^n въ разложеніи по степенямъ ξ выраженія

$$\varphi_a(\xi) = \frac{\eta^a}{1-\xi} \frac{1 - \alpha^b\,\eta^{2b}}{1 - \alpha^{a+b}\,\eta^{2(a+b)}}.$$

Разложеніе же полученнаго выраженія $\varphi_a(\xi)$ въ рядъ по степенямъ ξ сводится къ разложенію различныхъ степеней η въ подобные же ряды, такъ какъ простое дѣленіе даетъ для $\varphi_a(\xi)$ такой рядъ:

$$\varphi_a(\xi) = \frac{1}{1-\xi}\left\{\eta^a - \alpha^b\,\eta^{a+2b} + \alpha^{a+b}\,\eta^{3a+2b} - \alpha^{a+2b}\,\eta^{3a+4b} + \ldots\right\}$$

Наконецъ для разложенія различныхъ степеней η въ ряды

можно воспользоваться извѣстной формулой Лагранжа:

$$F(\zeta) = F(a) + \omega F'(a) f(a) + \frac{\omega^2}{1.\ 2} \frac{d F'(a) f(a) f(a)}{da} + \ldots,$$

при

$$\zeta = a + \omega f(\zeta).$$

Въ данномъ случаѣ имѣемъ

$$\eta = \xi (p + q\eta^2)$$

и потому

$$\frac{\eta}{\xi} = p + q\xi^2 \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2.$$

Соотвѣтственно этому, полагая въ формулѣ Лагранжа

$$\zeta = \frac{\eta}{\xi}, \quad a = p, \quad f(\zeta) = q\zeta^2, \quad \omega = \xi^2 \quad \text{и} \quad F(\zeta) = \zeta^m,$$

находимъ

$$\eta^m = p^m \xi^m \Big\{ 1 + mpq\xi^2 + \frac{m(m+3)}{1.\ 2} p^2 q^2 \xi^4 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m+k+1)(m+k+2)\ldots(m+2k-1)}{1.\ 2.\ 3 \ldots k} p^k q^k \xi^{2k} + \ldots \Big\}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что коеффиціентъ при ξ^n въ разложеніи по степенямъ ξ выраженія

$$\frac{\eta^m}{1-\xi}$$

равенъ произведенію p^m на сумму

$$1 + mpq + \frac{m(m+3)}{1.\ 2} p^2 q^2 + \ldots + \frac{m(m+i+1)\ldots(m+2i-1)}{1.\ 2.\ 3 \ldots i} p^i q^i,$$

гдѣ

$$i = \frac{n-m}{2} \quad \text{или} \quad \frac{n-m-1}{2}.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ указаннымъ выше разложеніемъ $(1-\xi)\,\varphi_a(\xi)$ въ рядъ по степенямъ η, нетрудно уже получить общую формулу для вычисленія искомой вѣроятности

$$y_{a,\,n}$$

при любыхъ значеніяхъ

$$a,\ b,\ n,\ p.$$

Остановимся на томъ случаѣ, когда каждая партія въ отдѣльности представляетъ игру безобидную, а капиталъ игрока L настолько великъ, что для разоренія L необходимо болѣе n партій.

Тогда

$$p = q = \frac{1}{2}$$

и искомая нами вѣроятность разоренія игрока M, не позже какъ въ n партій, представится суммою

$$\frac{1}{2^a} + \frac{a}{2^{a+2}} + \frac{a(a+3)}{2^{a+4}.1.2} + \ldots. + \frac{a(a+i+1)\ldots.(a+2i-1)}{2^{a+2i}.1.\ 2.\ 3\ldots.\ i},$$

гдѣ

$$i = \frac{n-a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{n-a-1}{2}.$$

Въ виду интереса, который представляетъ вопросъ о разореніи участниковъ безобидныхъ игръ, укажемъ еще приближенныя формулы для вычисленія той же вѣроятности разоренія M при большихъ значеніяхъ n, когда прямое вычисленіе суммы

$$\frac{1}{2^a} + \frac{a}{2^{a+2}} + \frac{a(a+3)}{2^{a+4}\ 1.\ 2} + \ldots. + \frac{a(a+i+1)\ldots.(a+2i-1)}{2^{a+2i}\ 1.\ 2\ldots.\ i}$$

весьма затруднительно.

Для приближеннаго вычисленія этой суммы, равной $y_{a,\,n}$, замѣтимъ, что безконечная сумма

$$\frac{1}{2^a} + \frac{a}{2^{a+2}} + \frac{a(a+3)}{2^{a+4}\ 1.\ 2} + \frac{a(a+4)\ (a+5)}{2^{a+6}\ 1.\ 2.\ 3} + \ldots.,$$

представляющая вѣроятность разоренія игрока M безъ ограниченія числа партій и капитала игрока L, равна единицѣ и что слѣдовательно

$$1 - y_{a,\,n} = \frac{a(a+i+2)\ldots.\ (a+2i+1)}{2^{a+2i+2}\ 1.\ 2\ldots.\ (i+1)} + \frac{a(a+i+3)\ldots.\ (a+2i+3)}{2^{a+2i+4}\ 1.\ 2\ldots.\ (i+2)} + \ldots.$$

Общій членъ этой суммы

$$\frac{a(a+k+1)\ldots.(a+2k-1)}{2^{a+2k}\,1.\,2\ldots k}$$

мы обозначимъ символомъ z_k.

Обращаясь затѣмъ къ формулѣ Стирлинга и принимая во вниманіе равенство

$$z_k=\frac{a}{2^{a+2k}(a+2k)}\cdot\frac{1.\,2.\,3\ldots.(a+2k)}{1.\,2\ldots.k.\,1.\,2\ldots.(a+k)}$$

находимъ два выраженія

$$z'_k=a\sqrt{\frac{1}{2\pi k(a+k)(a+2k)}}\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k}\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^k$$

и

$$z''_k=z'_k\,e^{\frac{1}{12(a+2k)}-\frac{1}{12k}-\frac{1}{12(a+k)}},$$

изъ которыхъ первое z'_k больше z_k, а второе z''_k меньше z_k.

Нетрудно также убѣдиться, что при $k>i$ оправдываются неравенства

$$\frac{1}{4}>\frac{k(a+k)(a+2k)}{(a+2k)^3}>\frac{i(a+i)(a+2i)}{(a+2i)^3},$$

$$\frac{1}{12(a+2k)}-\frac{1}{12k}-\frac{1}{12(a+k)}>\frac{1}{12(a+2i)}-\frac{1}{12i}-\frac{1}{12(a+i)}$$

$$\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^k\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k}>\left(\frac{a+2i}{2i}\right)^i\left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+i}$$

и

$$\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^k\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k}<e^{-\frac{a^2}{2(a+2k)}}.$$

Слѣдовательно, если положимъ

$$\overset{+}{z}_k=\frac{a+2i}{\sqrt{i(a+i)}}\,\frac{a}{\sqrt{2\pi(a+2k)^3}}\,e^{-\frac{a^2}{2(a+2k)}}$$

и

$$\overline{z}_k=H\frac{2a}{\sqrt{2\pi(a+2k)^3}}\left(\frac{a+2i}{2i}\right)^i\left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+i}$$

при

$$H=e^{\frac{1}{12(a+2i)}-\frac{1}{12i}-\frac{1}{12(a+i)}},$$

то всѣ слагаемыя суммы

$$z_{i+1}+z_{i+2}+\ldots,$$

равной $1-y_{a,n}$, удовлетворятъ неравенствамъ

$$\overset{+}{z}_k > z_k > \overset{-}{z}_k$$

и потому

$$\overset{+}{z}_{i+1}+\overset{+}{z}_{i+2}+\ldots > 1-y_{a,n} > \overset{-}{z}_{i+1}+\overset{-}{z}_{i+2}+\ldots$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2i+2)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(a+2i+4)^3}}+\ldots > \frac{1}{\sqrt{a+2i}}-\frac{1}{2\sqrt{(a+2i)^3}}$$

и

$$\frac{e^{-\frac{a^2}{2(a+2i+2)}}}{\sqrt{(a+2i+2)^3}}+\frac{e^{-\frac{a^2}{2(a+2i+4)}}}{\sqrt{(a+2i+4)^3}}+\ldots < \int_{i+\frac{a}{2}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{a^2}{4x}}dx}{(\sqrt{2x})^3},$$

по крайней мѣрѣ при достаточно большихъ значеніяхъ i, когда

$$a+2i > \frac{a^2}{3}.$$

Наконецъ простая подстановка преобразуетъ интегралъ

$$\int_{i+\frac{a}{2}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{a^2}{4x}}dx}{(\sqrt{2x})^3}$$

въ

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\int_0^{\tau} e^{-z^2}\,dz,$$

гдѣ

$$\tau=\frac{a}{2\sqrt{i+\frac{a}{2}}}.$$

Итакъ при

$$n \geqq \frac{a^2}{3} + 1$$

искомая нами вѣроятность разоренія игрока M, не позже какъ въ n партій, больше

$$1 - \frac{a+2i}{\sqrt{i(a+i)\pi}} \int_0^\tau e^{-s^2}\, ds$$

и меньше

$$1 - H \frac{2\tau}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a+2i}{2i}\right)^i \left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+i} \left(1 - \frac{1}{2(a+2i)}\right),$$

гдѣ

$$i = \frac{n-a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{n-a-1}{2}, \quad \tau = \frac{a}{2\sqrt{i + \frac{a}{2}}}$$

и

$$H = e^{\frac{1}{12(a+2i)} - \frac{1}{12i} - \frac{1}{12(a+i)}}.$$

Соотвѣтственно этому можемъ установить приближенную формулу

$$y_{a,\,n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-s^2}\, ds,$$

гдѣ τ имѣетъ вышеуказанное значеніе.

Для примѣра положимъ

$$a = 100 \quad \text{и} \quad n = 200000.$$

Тогда

$$a + 2i = 200000, \; i = 99950, \; a + i = 100050,$$

$$\tau = \frac{100}{2\sqrt{100000}} = \sqrt{0{,}025} = 0{,}15811\ldots.$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-s^2}\, ds = 0{,}17693\ldots. \; ^{*});$$

вычитая же число 0,17693.... изъ единицы, получимъ для

---

*) André Markoff. Table des valeurs de l'intégrale. $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$.

вѣроятности разоренія игрока M такое приближенное значеніе

0,82306.

И достаточно уменьшить на одну единицу послѣднюю цифру найденной приближенной величины вѣроятности, чтобы имѣть число

0,82305

меньшее этой вѣроятности; ибо въ данномъ случаѣ

$$\frac{a+2i}{2\sqrt{i(a+i)}}=\left\{1-\frac{1}{4000000}\right\}^{-\frac{1}{2}}<1,0000002.$$

Для опредѣленія другого предѣла той же вѣроятности обращаемся къ таблицамъ логарифмовъ и посредствомъ ихъ находимъ

$$\begin{array}{ll} \text{Log}\,(a+2i)\doteq 5,3010299956 & \text{Log}\,(2a+2i)\doteq 5,3012470886 \\ \text{Log}\,2i \quad\ \doteq 5,3008127941 & \text{Log}\,(a+2i)\doteq 5,3010299956 \\ \hline \qquad 0,0002172015 & \qquad 0,0002170930 \\ \qquad \times\, 99950 & \qquad \times\, 100050 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21,72015 \\ -0,01086 \\ \hline 21,70929 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21,70929 \\ -21,72015 \\ \hline \bar{1},98914 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21,70930 \\ +0,01085 \\ \hline 21,72015 \end{array}$$

$$\text{Log}\,2\tau=\bar{1},5 \qquad\qquad \text{Log}\,H>\frac{-1}{10^6}$$

$$\frac{1}{2}\text{Log}\,\frac{1}{\pi}\doteq\bar{1},75142 \qquad\qquad \text{Log}\left(1-\frac{1}{2(a+2i)}\right)>\frac{-2}{10^6}$$

$$\begin{array}{r} \bar{1},98914 \\ \hline \bar{1},24056\doteq\text{Log}\,0,17400 \end{array}$$

и наконецъ

$$y_{a,\,n}<1-0,1739=0,8261.$$

Итакъ, если число партій ограничено 200000, то вѣроятность разоренія игрока M, капиталъ котораго составляетъ только сто ставокъ каждой партіи, не достигаетъ

0,83.

Если увеличимъ затѣмъ n въ сто разъ, то число τ уменьшится въ десять разъ и вмѣстѣ съ тѣмъ уменьшатся, приблизительно, въ десять разъ и найденные нами предѣлы разности $1-y_{a,\,n}$; такъ что при

$$n=20000000$$

вѣроятность разоренія того же игрока M будетъ довольно близка къ

$$1-0{,}017=0{,}983,$$

но меньше этого числа.

Если же, увеличивая n въ сто разъ мы вмѣстѣ съ тѣмъ увеличимъ капиталъ M въ десять разъ, то τ останется безъ измѣненія и вѣроятность разоренія игрока M по прежнему будетъ меньше

$$0{,}83.$$

Замѣтимъ, что вѣроятность разоренія игрока M оставалась бы меньше $\frac{1}{2}$ при всякомъ числѣ партій, если бы окончательный расчетъ былъ отложенъ до того момента, пока не будетъ сыграно это число партій.

Требованіе немедленной расплаты за каждую партію приближаетъ эту вѣроятность къ единицѣ, такъ что при достаточно большомъ числѣ партій разореніе игрока M становится весьма вѣроятнымъ.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о тѣхъ случаяхъ, когда каждая партія въ отдѣльности представляетъ игру не безобидную, при чемъ различимъ два предположенія:

$$1)\ p>q \quad \text{и} \quad 2)\ p<q.$$

При $p>q$ отдѣльныя партіи невыгодны для M и къ прежнему заключенію можно добавить, что отсрочка окончательнаго расчета не устраняетъ большой вѣроятности разоренія M.

При $p<q$ отдѣльныя партіи выгодны для M и приведенныя выше формулы показываютъ, что вѣроятность разоренія

игрока M всегда меньше $\left(\frac{p}{q}\right)^a$ и можетъ быть сдѣлана сколь угодно близкою къ $\left(\frac{p}{q}\right)^a$ посредствомъ увеличенія капитала L и числа допускаемыхъ партій n.

И здѣсь слѣдуетъ помнить, что разсматриваемая нами величина вѣроятности разоренія игрока M обусловлена требованіемъ немедленной расплаты за каждую партію; такъ какъ, согласно выводамъ 2[й] и 3[й] главъ, вѣроятность разоренія M сдѣлалась бы сколь угодно малою, если бы было назначено напередъ достаточно большое число партій и окончательный расчетъ былъ отложенъ до тѣхъ поръ, пока не будетъ сыграно это число партій.

§ 23. *Задача 8[я]*. Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

будутъ n независимыхъ величинъ и пусть совокупность чиселъ

$$1, 2, 3, \ldots, m$$

представляетъ всѣ возможныя, и при томъ равновозможныя, значенія каждой изъ нихъ.

Требуется найти вѣроятность, что сумма

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

будетъ равна данному числу.

Рѣшеніе. Полагая послѣдовательно

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

приходимъ къ заключенію, что при любомъ значеніи n вѣроятность равенства

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \alpha,$$

гдѣ α число данное, можетъ быть опредѣлена какъ коэффиціентъ при

$$t^\alpha$$



въ разложеніи выраженія

$$\left\{\frac{t+t^2+\ldots+t^m}{m}\right\}^n$$

по степенямъ произвольнаго числа t.

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\left(\frac{t+t^2+\ldots+t^m}{m}\right)^n=\frac{t^n}{m^n}\,\frac{(1-t^m)^n}{(1-t)^n}=$$

$$=\frac{t^n}{m^n}\left[1-nt^m+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}t^{2m}-\ldots\right]\left[1+nt+\frac{n(n+1)}{1.\ 2}t^2+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}t^3+\ldots\right].$$

Поэтому, обозначивъ вѣроятность равенства

$$X_1+X_2+\ldots+X_n=\alpha$$

символомъ P_α, можемъ установить формулу

$$m^n P_\alpha=\frac{n(n+1)\ldots(\alpha-1)}{1.\ 2\ldots(\alpha-n)}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(\alpha-m-1)}{1.\ 2\ldots(\alpha-n-m)}+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(\alpha-2m-1)}{1.\ 2\ldots(\alpha-n-2m)}-\ldots,$$

которая представляетъ удобное средство для вычисленія P_α при небольшихъ значеніяхъ α.

Нетрудно также доказать равенство

$$P_\alpha=P_{n(m+1)-\alpha},$$

которое позволяетъ замѣнить число α разностью $n(m+1)-\alpha$ и такимъ образомъ даетъ возможность уменьшить α, если $\alpha>\frac{n(m+1)}{2}$.

Напримѣръ, при $m=6$ и $n=3$ находимъ

$$216\,P_{18}=216\,P_3=1,\ \ 216\,P_{17}=216\,P_4=3,$$

$$216\,P_{16}=216\,P_5=\frac{3.\ 4}{1.\ 2}=6,\ \ 216\,P_{15}=216\,P_6=\frac{3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3}=10,$$

$$216\,P_{14}=216\,P_7=\frac{3.\ 4.\ 5.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=15,$$

$$216\,P_{13}=216\,P_8=\frac{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}=21$$

$$216\,P_{12} = 216\,P_9 = \frac{3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6} - 3 = 25,$$

$$216\,P_{11} = 216\,P_{10} = \frac{3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} - 3\,.\,3 = 27.$$

Для осуществленія этого примѣра могутъ служить три обыкновенныя шестигранныя кости, на граняхъ которыхъ стоятъ нумера 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Если такія три кости брошены на плоскость и если

$$X_1,\; X_2,\; X_3$$

означаютъ нумера на верхнихъ ихъ граняхъ; то единственно возможными и притомъ равновозможными значеніями, какъ для X_1, такъ для X_2 и X_3, будутъ

$$1,\; 2,\; 3,\; 4,\; 5,\; 6.$$

Соотвѣтственно этому найденныя нами числа

$$P_3,\; P_4,\; P_5, \ldots,\; P_{21}$$

представляютъ вѣроятности различныхъ предположеній о суммѣ нумеровъ, вскрывшихся на трехъ обыкновенныхъ игральныхъ костяхъ.

И равенство

$$P_3 + P_4 + P_5 + \ldots + P_{10} = P_{11} + P_{12} + P_{13} + \ldots + P_{21}$$

указываетъ на одинаковую вѣроятность предположенія, что эта сумма не превосходитъ 10, и противоположнаго предположенія, что она больше десяти.

При большихъ значеніяхъ n точное вычисленіе P_α требуетъ утомительныхъ выкладокъ и едва ли можетъ представлять большой интересъ.

Тогда возникаетъ вопросъ о разысканіи приближенныхъ выраженій вѣроятности, по возможности простыхъ и близкихъ къ точному.

Предполагая большимъ только n, а не m и разсматривая не



вѣроятности отдѣльныхъ значеній суммы

$$X_1 + X_2 + \ldots . + X_n$$

а вѣроятность, что эта сумма лежитъ въ данныхъ предѣлахъ, мы можемъ обратиться къ общимъ приближеннымъ вычисленіямъ 3^{ей} главы.

Для примѣненія ихъ слѣдуетъ найти математическія ожиданія первыхъ и вторыхъ степеней разсматриваемыхъ величинъ.

Такъ какъ математическое ожиданіе любой изъ величинъ

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

равно

$$\frac{1+2+\ldots.+m}{m} = \frac{m+1}{2}$$

а математическое ожиданіе ея квадрата равно

$$\frac{1^2+2^2+\ldots.+m^2}{m} = \frac{(m+1)(2m+1)}{6};$$

то разность между математическимъ ожиданіемъ квадрата этой величины и квадратомъ ея математическаго ожиданія приводится къ

$$\frac{(m+1)(2m+1)}{6} - \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2-1}{12}$$

и потому выводы третьей главы даютъ для вѣроятности неравенствъ

$$n\frac{m+1}{2} - \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}} < X_1 + X_2 + \ldots . + X_n < n\frac{m+1}{2} + \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

приближенное выраженіе въ видѣ извѣстнаго интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-z^2}\,dz.$$

Воспользуемся частнымъ примѣромъ для указанія другого вывода того же приближеннаго выраженія вѣроятности, который можно примѣнить и въ общемъ случаѣ.

И прежде всего замѣтимъ, что въ разложеніи любой цѣлой функціи $F(t)$ по степенямъ t коэффиціентъ при t^α можетъ быть

представленъ въ видѣ интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F\left(e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) e^{-\alpha\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi;$$

ибо

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi = 2\pi$$

и для любого цѣлаго числа k, отличнаго отъ нуля, имѣемъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{k\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi = 0.$$

Поэтому

$$P_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{(n-\alpha)\varphi\sqrt{-1}}\left(1-e^{m\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}{m^n\left(1-e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi\sqrt{-1}}\left(e^{\frac{m}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{m}{2}\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}{m^n\left(e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi\sqrt{-1}} \left(\frac{\operatorname{Sin}\frac{m}{2}\varphi}{m\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}\right)^n d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{Cos}\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi \left(\frac{\operatorname{Sin}\frac{m}{2}\varphi}{m\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}\right)^n d\varphi.$$

Обращаясь къ приближеннымъ вычисленіямъ и положивъ

$$n\frac{m+1}{2} - \alpha = \beta = \gamma\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}},$$

замѣнимъ

$$\left(\frac{\operatorname{Sin}\frac{m}{2}\varphi}{m\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}\right)^n$$

показательною функціею

$$e^{-n\frac{m^2-1}{24}\varphi^2}$$

на основаніи соображеній, указанныхъ въ 3^{ей} главѣ, а за верхній предѣлъ интеграла возьмемъ ∞ вмѣсто π.

Мы получимъ такимъ образомъ приближенную формулу

$$P_{n\frac{m+1}{2}-\beta} \mp \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Cos}\beta\varphi . e^{-n\frac{m^2-1}{24}\varphi^2} d\varphi,$$

правая часть которой, какъ извѣстно, равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\frac{6\beta^2}{n(m^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\gamma^2}.$$

Согласно этому вѣроятность неравенствъ

$$n\frac{m+1}{2} - \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}} < X_1 + X_2 + \ldots. + X_n < n\frac{m+1}{2} + \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

приближенно представится суммою всѣхъ произведеній

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\gamma^2},$$

для которыхъ γ удовлетворяетъ неравенствамъ

$$-\tau < \gamma < +\tau$$

и обращаетъ выраженіе

$$n\frac{m+1}{2} - \gamma\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

въ цѣлое число.

Всѣ члены указанной суммы содержатъ множитель

$$\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}},$$

который равенъ разности каждыхъ двухъ смежныхъ значеній γ и будетъ сколь угодно малъ при достаточно большихъ n.

Замѣнивъ на этомъ основаніи сумму интеграломъ, получаемъ для вѣроятности неравенствъ

$$n\frac{m+1}{2} - \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}} < X_1 + X_2 + \ldots. + X_n < n\frac{m+1}{2} + \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

прежнее приближенное выраженіе

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau} e^{-\gamma^2}\,d\gamma.$$

§ 24. Въ заключеніе главы вернемся къ важному вопросу о повтореніи независимыхъ испытаній, которымъ мы занимались во второй главѣ.

Обозначивъ число испытаній буквою n и предположивъ, что при каждомъ изъ нихъ вѣроятность событія E равна p, мы нашли, что вѣроятность появленія событія E ровно m разъ при этихъ n испытаніяхъ выражается произведеніемъ

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ldots.\ n}{1.\ 2\ \ldots.m.\ 1.\ 2\ldots.\ (n-m)}\,p^m\,q^{n-m},$$

гдѣ

$$q=1-p.$$

Поэтому вѣроятность, что событіе E появится при разсматриваемыхъ n испытаніяхъ болѣе l разъ, представится суммою

$$\frac{1.\ 2\ldots.\ np^{l+1}\,q^{n-l-1}}{1.\ 2\ldots.\ (l+1)\ 1.\ 2\ldots.\ (n-l-1)}+\frac{1.\ 2\ldots.\ np^{l+2}\,q^{n-l-2}}{1.\ 2\ldots.\ (l+2)\ 1.\ 2\ldots.\ (n-l-2)}+\ldots,$$

которая приводится къ произведенію выраженія

$$P=\frac{1.\ 2\ldots.\ n}{1.\ 2\ldots.\ (l+1)\ 1.\ 2\ldots.\ (n-l-1)}\,p^{l+1}\,q^{n-l-1}$$

на сумму

$$S=1+\frac{n-l-1}{l+2}\,\frac{p}{q}+\frac{(n-l-1)\,(n-l-2)}{(l+2)\,(l+3)}\left(\frac{p}{q}\right)^2+\ldots.$$

Для приближеннаго вычисленія P при большихъ значеніяхъ n, $l+1$ и $n-l-1$ можетъ служить формула Стирлинга, доставляющая рядъ неравенствъ, изъ которыхъ мы укажемъ здѣсь только два простѣйшихъ

$$P<P_1=\sqrt{\frac{n}{2\pi\,(l+1)\,(n-l-1)}}\left(\frac{np}{l+1}\right)^{l+1}\left(\frac{nq}{n-l-1}\right)^{n-l-1} \qquad (8)$$

и

$$\frac{P}{P_1}>H=e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12\,(l+1)}-\frac{1}{12\,(n-l-1)}} \qquad (9).$$



Обращаясь къ суммѣ S, мы покажемъ теперь, что для ея вычисленія можно съ успѣхомъ воспользоваться разложеніемъ въ непрерывную дробь, которое вытекаетъ какъ частный случай изъ формулы Гаусса

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{ax}{1-\cfrac{bx}{1-\cfrac{cx}{1-\cfrac{dx}{1-\ldots}}}}},$$

гдѣ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ и $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$ означаютъ *гипергеометрическіе* ряды

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots,$$

и

$$1+\frac{\alpha(\beta+1)}{1.(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{1.2(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2+\ldots,$$

коэффиціенты же

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots$$

опредѣляются равенствами

$$a=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)},\quad b=\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$c=\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},\quad d=\frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

. . . .

Относительно вывода формулы Гаусса, замѣтимъ, что она вытекаетъ изъ слѣдующихъ простыхъ связей между различными гипергеометрическими рядами:

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)-F(\alpha,\beta,\gamma,x)=axF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x),$$

$$F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)-F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)$$
$$=bxF(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3,x),$$

$$F(\alpha+1,\ \beta+2,\ \gamma+3,\ x)-F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2,\ x)$$
$$=cx\,F(\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+4,\ x),$$

. . . .

Для примѣненія формулы Гаусса къ разложенію S въ непрерывную дробь слѣдуетъ положить

$$\alpha=-n+l+1,\ \beta=0,\ \gamma=l+1,\ x=-\frac{p}{q},$$

что даетъ намъ такое равенство

$$S=\cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{1+\cfrac{d_1}{1-\cfrac{c_2}{1+\cfrac{d_2}{1-\cdots}}}}} \qquad (10),$$

гдѣ вообще

$$c_k=\frac{(n-k-l)\,(l+k)\,p}{(l+2k-1)\,(l+2k)\,q},\quad d_k=\frac{k\,(n+k)\,p}{(l+2k)\,(l+2k+1)\,q} \qquad (11).$$

Мы имѣемъ здѣсь не безконечную, а конечную непрерывную дробь, послѣднимъ звеномъ которой будетъ

$$\frac{d_{n-l-1}}{1},$$

такъ какъ $c_{n-l}=0$.

Нетрудно также убѣдиться, что каждое изъ чиселъ c_k меньше единицы, если только

$$\frac{n-l-1}{l+2}\,\frac{p}{q}<1,$$

какъ мы и будемъ предполагать въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ.

Поэтому, обозначивъ для краткости непрерывную дробь

$$\cfrac{c_k}{1+\cfrac{d_k}{1-\cfrac{c_{k+1}}{1+\cdots}}}$$

символомъ ω_k, имѣемъ

$$0 < \omega_k < c_k$$

и затѣмъ можемъ установить рядъ неравенствъ

$$S = \frac{1}{1-\omega_1} < \frac{1}{1-c_1}, \quad S > \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{1+\cfrac{d_1}{1-c_2}}},$$

$$S < \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{1+\cfrac{d_1}{1-\cfrac{c_2}{1+\cfrac{d_2}{1-c_3}}}}}$$

. . . .

Остается сопоставить послѣднія неравенства съ тѣми, которымъ удовлетворяетъ P и которыя были указаны выше; и мы будемъ имѣть возможность образовать рядъ приближенныхъ значеній вѣроятности появленія событія E, въ разсматриваемыя n испытаній, болѣе l разъ, при чемъ о каждомъ изъ этихъ приближенныхъ значеній будемъ знать, превосходитъ ли оно вѣроятность или напротивъ меньше ея.

На основаніи тѣхъ же неравенствъ, переставивъ p съ q и замѣнивъ l на $n-l'$, найдемъ рядъ приближенныхъ значеній вѣроятности появленія событія E, въ разсматриваемыя n испытаній, менѣе l' разъ, при чемъ о каждомъ изъ полученныхъ нами приближенныхъ значеній этой новой вѣроятности также будемъ знать, превосходитъ ли оно вѣроятность или меньше ея.

А по приближеннымъ величинамъ вѣроятности появленія событія E болѣе l разъ и вѣроятности появленія событія E менѣе l' разъ нетрудно, при $l > l'$, получить и приближенную величину вѣроятности появленія событія E не болѣе l разъ и не менѣе l' разъ; такъ какъ сумма всѣхъ этихъ трехъ вѣроятностей должна составлять единицу.

Для примѣра положимъ

$$p = \frac{3}{5}, \quad q = \frac{2}{5}, \quad n = 6520$$

и будемъ искать вѣроятность, что отношеніе числа появленій событія E къ числу испытаній будетъ отличаться отъ $\frac{3}{5}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{50}$.

Иначе сказать, будемъ искать вѣроятность, что событіе E появится не болѣе 4042 разъ, а противоположное ему событіе не болѣе 2738 разъ.

Согласно только что сдѣланному замѣчанію, вычисленіе искомой вѣроятности сводится къ вычисленію вѣроятности, что событіе E появится болѣе 4042, и вѣроятности, что противоположное событіе появится болѣе 2738 разъ.

Обращаясь къ вѣроятности, что событіе E появится болѣе 4042 разъ, мы должны положить, въ вышеуказанныхъ формулахъ и неравенствахъ

$$p = \frac{3}{5}, \quad q = \frac{2}{5}, \quad n = 6520, \quad l = 4042.$$

Тогда

$$P_1 = \sqrt{\frac{3260}{\pi \,.\, 4043 \,.\, 2477}} \left(\frac{3912}{4043}\right)^{4043} \left(\frac{2608}{2477}\right)^{2477},$$

$$H = e^{\frac{1}{12\,.\,6520} - \frac{1}{12\,.\,4043} - \frac{1}{12\,.\,2477}}$$

и посредствомъ логарифмическихъ таблицъ находимъ

$\text{Log}\,4043 = 3{,}6067037413$
$\text{Log}\,3912 = 3{,}5923988461$

143048952
$\times 4043$

57,2195808
5721958
429147

57,8346913
$-55{,}4391749$

2,3955164

$\text{Log}\,2608 = 3{,}4163075871$
$\text{Log}\,2477 = 3{,}3939260066$

0,0223815805
$\times 2477$

44,7631610
8,9526322
1,5667106
1566711

55,4391749

$$
\begin{array}{lr}
 & 2,3955164 \\
\frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\ 4043 & \mathrel{=\!\!\!|}1,8033519 \\
\frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\ 2477 & \mathrel{=\!\!\!|}1,6969630 \\
\frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\ \pi & \mathrel{=\!\!\!|}0,2485749 \\
\hline
 & 6,1444062
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\ 3260 & \mathrel{=\!\!\!|}1,7566088 \\
 & -6,1444062 \\
\hline
 & 5,6122026-10 \\
\mathrm{Log}\ H > -\ 0,00003 &
\end{array}
$$

$$0,00004094 < P < 0,00004095.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$c_1 = \frac{2477}{4044} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7431}{8088}, \quad d_1 = \frac{6521}{4044.\ 4045} \cdot \frac{3}{2} = \frac{19563}{32715960},$$

$$c_2 = \frac{2476.\ 4044}{4045.\ 4046} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7509708}{8183035}, \quad d_2 = \frac{6522.\ 3}{4046.\ 4047} = \frac{3261}{2729027},$$

$$c_3 = \frac{2475.\ 4045}{4047.\ 4048} \cdot \frac{3}{2} = \left(1 - \frac{2}{4047}\right) \frac{7425}{8096}$$

и производя простыя выкладки послѣдовательно получаемъ

$$c_3 < 0,9167, \quad \frac{d_2}{1-\omega_3} < \frac{3261}{0,0833 \times 2729027} < 0,01435,$$

$$0,918 > c_2 > \omega_2 > \frac{c_2}{1,01435} > 0,9047,$$

$$0,0074 > \frac{d_1}{0,082} > \frac{d_1}{1-\omega_2} > \frac{d_1}{0,0953} > 0,00626,$$

$$0,912 < \frac{c_1}{1,0074} < \omega_1 < \frac{c_1}{1,00626} < 0,9131,$$

$$11,36 < \frac{1}{0,088} < S < \frac{1}{0,0869} < 11,51;$$

слѣдовательно

$$SP < \frac{0,4095}{869} < 0,0004713,$$

но

$$SP > \frac{0,4094}{880} > 0,000465.$$

Переходя къ вѣроятности, что событіе противоположное E появится болѣе 2738 разъ, мы должны положить

$$p = \frac{2}{5}, \quad q = \frac{3}{5}, \quad n = 6520, \quad l = 2738.$$

При такихъ значеніяхъ p, q, n, l получаемъ

$$P_1 = \sqrt{\frac{3260}{\pi .\ 2739 .\ 3781}} \left(\frac{2608}{2739}\right)^{2739} \left(\frac{3912}{3781}\right)^{3781},$$

$$H = e^{\frac{1}{12.\ 6520} - \frac{1}{12.\ 2739} - \frac{1}{12.\ 3781}}$$

и посредствомъ логарифмическихъ таблицъ находимъ

$\mathrm{Log}\,2739 +\!\!\!= 3{,}4375920323$	$\mathrm{Log}\,3912 +\!\!\!= 3{,}5923988461$
$\mathrm{Log}\,2608 +\!\!\!= 3{,}4163075871$	$\mathrm{Log}\,3781 +\!\!\!= 3{,}5776066774$
212844452	147921687
$\times 2739$	$\times 3781$
42,5688904	44,3765061
14,8991116	10,3545181
6385334	1,1833735
1915600	147922
58,2980954	55,9291899
—55,9291899	
2,3689055	
$\frac{1}{2}\mathrm{Log}\ 2739 = 1{,}7187960$	$\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,3260 = 1{,}7566088$
	—6,1250797
$\frac{1}{2}\mathrm{Log}\ 3781 = 1{,}7888033$	5,6315291—10
$\frac{1}{2}\log\pi = 0{,}2485749$	$\mathrm{Log}\,H < -0{,}00003$
6,1250797	$0{,}00004280 < P < 0{,}00004281.$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$c_1 = \frac{3781}{2740} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3781}{4110},\quad d_1 = \frac{6521}{2740.\ 2741} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6521}{11265510},$$

$$c_2 = \frac{3780.\ 2740}{2741.\ 2742} \cdot \frac{2}{3} = \frac{420}{457} \cdot \frac{2740}{2741},\quad d_2 = \frac{2.6522}{2742.\ 2743} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4348}{3760653},$$

$$c_3 = \frac{3779.\ 2741}{2743.\ 2744} \cdot \frac{2}{3} = \left(1 - \frac{2}{2743}\right) \frac{7558}{8232},$$

откуда послѣдовательно выводимъ неравенства

$$c_2 < 0{,}9175\,,\ \frac{d_2}{1-\omega_2} < \frac{4348}{0{,}0825 \times 3760653} < 0{,}01402,$$

$$0{,}919 > c_2 > \omega_2 > \frac{c_2}{1{,}01402} > 0{,}9059,$$

$$0{,}0072 > \frac{d_1}{0{,}081} > \frac{d_1}{1-\omega_2} > \frac{d_1}{0{,}0941} > 0{,}00615,$$

$$0{,}913 < \frac{c_1}{1{,}0072} < \omega_1 < \frac{c_1}{1{,}00615} < 0{,}9144,$$

$$11{,}49 < \frac{1}{0{,}087} < S < \frac{1}{0{,}0856} < 11{,}69;$$

слѣдовательно

$$SP < \frac{0{,}4281}{856} < 0{,}0005002,$$

но

$$SP > \frac{0{,}428}{870} > 0{,}000491.$$

Итакъ вѣроятность, что въ разсматриваемыя нами 6520 испытаній событіе E появится болѣе 4042 разъ, заключается между

$$0{,}0004713 \quad \text{и} \quad 0{,}000465,$$

а вѣроятность, что въ тѣже испытанія событіе E появится менѣе 3782 разъ, заключается между

$$0{,}0005002 \quad \text{и} \quad 0{,}000491.$$

И потому вѣроятность, что событіе E появится въ эти испытанія не менѣе 3782 разъ и не болѣе 4042 разъ, лежитъ между

$$1 - 0{,}000972 = 0{,}999028$$

и

$$1 - 0{,}000956 = 0{,}999044.$$

ГЛАВА V

Предѣлы, ирраціональныя числа и непрерывныя величины въ исчисленіи вѣроятностей.

§ 25. Не устанавливая общихъ опредѣленій, мы будемъ называть нѣкоторыя событія *предѣльными* для другихъ событій, подобно тому какъ касательная называется предѣльнымъ положеніемъ сѣкущей.

Называя, на какихъ либо основаніяхъ, событіе E предѣльнымъ для ряда событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots,$$

вѣроятности которыхъ образуютъ рядъ чиселъ

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$$

мы вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлимъ вѣроятность событія E какъ предѣлъ, къ которому стремится p_n при безпредѣльномъ возрастаніи значка n.

Примѣры предѣльныхъ событій можно найти въ 6ой и 7ой задачѣ предыдущей главы.

Но мы не станемъ возвращаться къ разобраннымъ уже вопросамъ, а займемся новыми вопросами.



Прежде чѣмъ перейти къ частнымъ вопросамъ, замѣтимъ, что при всѣхъ обобщеніяхъ понятія о вѣроятности какъ о числѣ мы имѣемъ въ виду сохраненіе теоремъ сложенія и умноженія вѣроятностей.

Первый интересный примѣръ предѣльныхъ событій, на которомъ мы остановимся, доставитъ намъ задача Чебышева; такое названіе мы придаемъ слѣдующей задачѣ, заимствованной изъ лекцій Чебышева:

Опредѣлить вѣроятность несократимости раціональной дроби, числитель и знаменатель которой написаны на удачу.

Эта замѣчательная задача, подобно многимъ другимъ, станетъ опредѣленною и получитъ опредѣленное рѣшеніе только послѣ ряда условій, выясняющихъ смыслъ указанія, что числитель и знаменатель дроби написаны на удачу.

Приступая къ изслѣдованію поставленнаго вопроса, займемся сначала болѣе простымъ вопросомъ о сократимости и не сократимости дроби на данное число a.

Относительно числителя дроби мы можемъ различить a случаевъ по величинѣ остатка отъ обыкновеннаго дѣленія его на a; именно возможными величинами остатка будутъ

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, a-1.$$

И въ силу указанія, что числитель написанъ на удачу, мы будемъ считать всѣ эти a случаевъ равновозможными.

Такъ какъ числитель дѣлится на a только въ одномъ изъ установленныхъ нами случаевъ, то вѣроятность дѣлимости его на a выразится дробью $\frac{1}{a}$.

На подобныхъ же основаніяхъ вѣроятность дѣлимости знаменателя дроби на a будетъ также равна $\frac{1}{a}$.

Слѣдовательно вѣроятность, что дробь можно сократить на a выразится произведеніемъ

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$$

и потому вѣроятность, что сокращеніе дроби на a невозможно, представится разностью

$$1-\frac{1}{a^2}.$$

Далѣе важно установить, что вѣроятность несократимости дроби на a сохраняетъ величину

$$1-\frac{1}{a^2}$$

и въ томъ случаѣ, когда извѣстна несократимость дроби на какое либо число b простое съ a; такъ какъ и въ этомъ случаѣ возможными остатками отъ дѣленія числителя и знаменателя дроби на a будутъ по прежнему

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, a-1.$$

Установивъ это, возьмемъ рядъ послѣдовательныхъ простыхъ чиселъ

$$\alpha_1=2,\ \alpha_2=3,\ \alpha_3=5,\ \alpha_4=7,\ \alpha_5=11, \ldots,$$

и назовемъ событіемъ E_n несократимость дроби на

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Вѣроятность такого событія E_n представится на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей произведеніемъ

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\alpha_n^2}\right).$$

Разсматривая наконецъ несократимость дроби какъ предѣльное событіе для ряда событій

$$E_1,\ E_2, \ldots, E_n, \ldots,$$

выразимъ вѣроятность этой несократимости безконечнымъ произведеніемъ

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\ldots,$$

которое равно

$$\frac{6}{\pi^2},$$

какъ мы сейчасъ покажемъ.

Для доказательства, что полученное нами безконечное произведеніе равно $\frac{6}{\pi^2}$, обозначимъ его буквою P и разсмотримъ $\frac{1}{P}$.

Примѣняя къ каждой изъ дробей

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}},\quad \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}},\quad \frac{1}{1-\frac{1}{5^2}},\ldots\ldots$$

извѣстную формулу

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdot,$$

получаемъ

$$\frac{1}{P}=\Sigma\frac{1}{2^{2\lambda}}\cdot\Sigma\frac{1}{3^{2\mu}}\cdot\Sigma\frac{1}{5^{2\nu}}\ldots\ldots=\Sigma\frac{1}{(2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu\ldots)^2},$$

гдѣ подъ

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ldots\ldots,$$

мы подразумѣваемъ каждое изъ чиселъ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots$$

Каждое произведеніе

$$2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu\ldots\ldots$$

равно цѣлому числу; съ другой стороны извѣстно, что всѣ цѣлыя числа можно представить подобными произведеніями и что каждому цѣлому числу соотвѣтствуетъ только одна система чиселъ

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ldots\ldots,$$

при которой произведеніе

$$2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu\ldots\ldots$$

равно этому числу.

Поэтому полученная нами сумма

$$\Sigma \frac{1}{(2^{\lambda}\, 3^{\mu}\, 5^{\nu} \ldots)^2}$$

приводится къ извѣстной суммѣ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

равной

$$\frac{\pi^2}{6}.$$

Итакъ, по вышеприведеннымъ соображеніямъ, вѣроятность несократимости раціональной дроби, числитель и знаменатель которой написаны на удачу, выразится ирраціональнымъ числомъ

$$\frac{6}{\pi^2}.$$

Несократимость раціональной дроби можно также разсматривать какъ предѣльное событіе для другого ряда событій

$$E_2', \; E_3', \ldots, \; E_n', \ldots,$$

гдѣ E_n' означаетъ несократимость такой дроби, числитель и знаменатель которой взяты на удачу изъ совокупности n чиселъ

$$1, \; 2, \; 3, \ldots, \; n.$$

Не останавливаясь на этомъ новомъ толкованіи задачи, замѣтимъ, что оно не измѣнитъ найденной нами величины вѣроятности

$$\frac{6}{\pi^2},$$

если вѣроятность событія E_n' мы выразимъ отношеніемъ

$$\frac{m}{n^2},$$

гдѣ m означаетъ число несократимыхъ дробей, числители и знаменатели которыхъ взяты изъ совокупности

$$1, \; 2, \; 3, \ldots, \; n.$$



Другой примѣръ предѣльныхъ событій доставитъ намъ слѣдующая задача.

Прямая линія AB раздѣлена точкою C на двѣ опредѣленныя части.

Затѣмъ та же прямая раздѣлена на три части двумя точками P и Q, изъ которыхъ первая поставлена, на удачу, на AC, а вторая поставлена, также на удачу, на CB.

A P C Q B

Требуется опредѣлить вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного треугольника.

Иначе сказать, требуется опредѣлить вѣроятность, что каждая изъ трехъ длинъ

$$AP,\ PQ,\ QB$$

меньше суммы двухъ остальныхъ.

Чтобы придать поставленному вопросу опредѣленный смыслъ, прежде всего положимъ, что прямая AB раздѣлена на $2n$ равныхъ частей, общую длину которыхъ обозначимъ буквою ε.

Пусть вмѣстѣ съ тѣмъ цѣлыя числа k и l опредѣляются неравенствами

$$2k\varepsilon < AC \leqq (2k+1)\,\varepsilon$$

и

$$(2l-1)\,\varepsilon \leqq BC < 2l\varepsilon,$$

такъ что

$$(2k+2l-1)\,\varepsilon < AB = 2n\varepsilon < (2k+2l+1)\,\varepsilon$$

и потому

$$k+l=n.$$

Ограничимъ теперь положеніе точекъ P и Q условіемъ, что онѣ не могутъ совпадать съ другими точками прямой AB кромѣ

тѣхъ, которыя дѣлятъ эту прямую на $2n$ равныхъ частей, при чемъ для устраненія лишнихъ разсужденій исключимъ и точку C изъ совокупности возможныхъ положеній точки P.

При такихъ условіяхъ для AP возможны только слѣдующія значенія

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon, \ldots,\ 2k\varepsilon,$$

а для BQ возможны только слѣдующія значенія

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon, \ldots,\ (2l-1)\varepsilon.$$

Соединяя каждое возможное значеніе AP съ каждымъ возможнымъ значеніемъ BQ, получаемъ

$$(2k+1)\cdot 2l$$

случаевъ, которые мы будемъ считать не только единственно возможными, но и равновозможными.

Переходя къ счету тѣхъ случаевъ, когда

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника, для опредѣленности положимъ

$$AC \leqq CB.$$

Случаи, къ счету которыхъ мы переходимъ, опредѣляются неравенствами

$$AP < PB,\ PQ < AP + BQ,\ AQ > BQ.$$

Первое изъ этихъ неравенствъ выполняется при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ точки P, такъ какъ

$$AP < AC \leqq CB \leqq PB,$$

а остальныя два приведутся къ слѣдующимъ

$$x + y > n = k + l,\ n > y,$$

если положимъ

$$AP = x\varepsilon,\ BQ = y\varepsilon.$$

Совокупность всѣхъ случаевъ, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ, нетрудно расположить въ таблицу

$x=2$	$x=3$	$x=4$		$x=2k$
$y=n-1$	$y=n-1$	$y=n-1$		$y=n-1$
	$y=n-2$	$y=n-2$		$y=n-2$
		$y=n-3$		....
				....
				$y=n-2k+1$

Отсюда видно, что общее число разсматриваемыхъ нами теперь случаевъ равно

$$1+2+3+\ldots+(2k-1)=k(2k-1).$$

Раздѣливъ это число на общее число допускаемыхъ нами случаевъ

$$(2k+1)\,2l,$$

находимъ, что при сдѣланныхъ нами предположеніяхъ вѣроятность возможности составить изъ

$$AP,\ PQ,\ QB$$

трехугольникъ выражается дробью

$$\frac{k(2k-1)}{2l(2k+1)}.$$

Наконецъ для устраненія ограниченій, въ силу которыхъ точки P и Q могутъ совпадать только съ опредѣленными точками отрѣзковъ AC и CB, станемъ увеличивать n безпредѣльно.

Такъ какъ при безпредѣльномъ возрастаніи числа n дробь

$$\frac{k(2k-1)}{2l(2k+1)}$$

приближается къ предѣлу

$$\frac{1}{2}\frac{AC}{BC},$$

то на основаніи вышеизложенныхъ соображеній мы можемъ принять

$$\frac{1}{2}\frac{AC}{BC}$$

за искомую вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного треугольника.

Надо однако помнить, что для искомой вѣроятности мы могли бы вмѣсто

$$\frac{1}{2}\frac{AC}{BC}$$

получить совершенно иныя величины, если бы замѣнили другими нѣкоторыя изъ предположеній, введенныхъ нами въ рѣшеніе задачи, но не высказанныхъ при ея постановкѣ.

Къ такимъ предположеніямъ, обусловливающимъ нашъ выводъ, принадлежитъ, напримѣръ, равновозможность установленныхъ нами $(2k+1)\ 2l$ случаевъ.

Подобнымъ образомъ можно было бы разсмотрѣть разнообразные частные вопросы; но такой разборъ отдѣльныхъ вопросовъ былъ бы слишкомъ долгимъ и не доставилъ бы намъ опредѣленныхъ правилъ для рѣшенія другихъ вопросовъ въ виду того, что онъ требуетъ особыхъ соображеній для каждаго частнаго случая и заставляетъ кромѣ искомой вѣроятности вычислять другія вѣроятности, для которыхъ искомая служитъ предѣломъ.

Для сокращенія выводовъ и для сообщенія имъ бо́льшей ясности и опредѣленности, во многихъ случаяхъ, можно съ успѣхомъ воспользоваться расширеніемъ понятія о вѣроятности, чѣмъ мы и займемся въ слѣдующихъ параграфахъ.

Замѣтимъ, что разобранный сейчасъ вопросъ о возможности образовать треугольникъ принадлежитъ къ числу многихъ слу-

чаевъ, о которыхъ будетъ идти рѣчь; а задачу Чебышева и ей подобныя нельзя причислять къ нимъ.

§ 26. Положимъ, что совокупность возможныхъ значенiй X состоитъ не изъ конечнаго числа различныхъ чиселъ, а изъ всѣхъ чиселъ, лежащихъ между данными предѣлами

$$A \text{ и } B.$$

Положимъ далѣе, что о вѣроятности отдѣльныхъ значенiй X нѣтъ уже рѣчи и вмѣсто того возникаетъ вопросъ о вѣроятности, что X лежитъ въ какомъ нибудь данномъ промежуткѣ.

Въ этомъ случаѣ, уподобляя вѣроятность массѣ и вводя понятiе о *плотности* вѣроятности, аналогичное понятiю о плотности массы, мы будемъ вѣроятность каждой изъ четырехъ системъ неравенствъ

$$1)\ a < x < b,\quad 2)\ a \leqq x < b,\quad 3)\ a < x \leqq b,\quad 4)\ a \leqq x \leqq b$$

выражать однимъ и тѣмъ же интеграломъ

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (12).$$

Функцiю $f(x)$, которая стоитъ подъ знакомъ интеграла, мы назовемъ *плотностью* вѣроятности и будемъ устанавливать, въ каждомъ частномъ случаѣ, болѣе или менѣе произвольно, соблюдая слѣдующiя условiя:

$$1)\ f(x) \geqq 0 \text{ при } A \leqq x \leqq B,$$

$$2)\ f(x) = 0 \text{ при } x < A \text{ и при } x > B,$$

$$3)\ \int_A^B f(x)\,dx = 1.$$

Первое изъ этихъ трехъ условiй вызывается тѣмъ соображенiемъ, что вѣроятность должна оставаться всегда числомъ положительнымъ, или нулемъ; а второе и третье тѣмъ, что X, по предположенiю, лежитъ между A и B и не можетъ имѣть значенiй, выходящихъ изъ этихъ предѣловъ.

Простѣйшее предположеніе о функціи $f(x)$, которое мы обыкновенно будемъ дѣлать, выражается равенствомъ

$$f(x) = \text{пост. при } A \leqq x \leqq B,$$

при чемъ постоянное значеніе $f(x)$ равно

$$\frac{1}{B-A},$$

въ силу условія

$$\int_A^B f(x)\,dx = 1.$$

При такомъ предположеніи, для каждыхъ двухъ равныхъ промежутковъ, заключающихся между A и B, вѣроятности, что X лежитъ въ этихъ промежуткахъ, выражаются равными числами, и соотвѣтственно этому можно сказать, что всѣ возможныя значенія X представляются намъ равновозможными.

Другое замѣчательное предположеніе о $f(x)$ относится къ тому случаю, когда малымъ величинамъ X^2 мы придаемъ значительно большую вѣроятность чѣмъ большимъ, но не находимъ возможнымъ ограничить значенія X какимъ нибудь опредѣленнымъ промежуткомъ.

Это второе предположеніе, часто принимаемое, выражается равенствами

$$A = -\infty, \quad B = +\infty$$

$$f(x) = Ce^{-k^2x^2},$$

гдѣ C и k числа постоянныя, которыя въ силу условія

$$\int_A^B f(x)\,dx = 1$$

должны быть связаны уравненіемъ

$$C = \frac{k}{\sqrt{\pi}}$$

такъ какъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{k}.$$



Расширивъ такимъ образомъ понятіе о вѣроятности, мы вмѣстѣ съ тѣмъ расширимъ и понятіе о математическомъ ожиданіи.

Именно, математическими ожиданіями

$$X,\ X^2,\ X^3, \ldots\ldots$$

мы назовемъ соотвѣтственно интегралы

$$\int_A^B x f(x)\,dx,\quad \int_A^B x^2 f(x)\,dx,\quad \int_A^B x^3 f(x)\,dx, \ldots\ldots$$

и вообще математическимъ ожиданіемъ $\varphi(X)$ мы назовемъ интегралъ

$$\int_A^B \varphi(x)\, f(x)\,dx \qquad (13).$$

Напримѣръ, при

$$f(x) = \frac{1}{B-A}$$

математическое ожиданіе X равно

$$\int_A^B \frac{x\,dx}{B-A} = \frac{B+A}{2}$$

а математическое ожиданіе X^2 равно

$$\int_A^B \frac{x^2\,dx}{A-B} = \frac{A^2+AB+B^2}{3};$$

если же

$$A = -\infty,\quad B = +\infty \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2},$$

то математическое ожиданіе X равно нулю, а математическое ожиданіе X^2 равно

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2}\, x^2\,dx = \frac{1}{2k^2}.$$

Разсматривая двѣ или нѣсколько величинъ подобныхъ X, мы прежде всего выдѣлимъ случай независимыхъ величинъ, какъ простѣйшій.

Двѣ величины X и Y, возможныя значенія которыхъ состоятъ изъ всѣхъ чиселъ, лежащихъ въ данныхъ предѣлахъ, мы называемъ независимыми другъ отъ друга, если для любыхъ двухъ чиселъ

$$a, b$$

и для двухъ другихъ любыхъ чиселъ

$$c, \partial$$

мы можемъ выразить вѣроятность неравенствъ

$$a \leqq X \leqq b$$

интеграломъ

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

а вѣроятность неравенствъ

$$c \leqq Y \leqq \partial$$

интеграломъ

$$\int_c^\partial f_1(y)\, dy,$$

гдѣ $f(x)$ сохраняетъ одинаковую величину, какъ при неизвѣстномъ значеніи Y, такъ и при всякомъ данномъ значеніи Y, а $f_1(y)$ сохраняетъ одинаковую величину, какъ при неизвѣстномъ значеніи X, такъ и при всякомъ данномъ значеніи X.

Для такихъ величинъ X и Y мы можемъ вѣроятность выполненія неравенствъ

$$a \leqq X \leqq b$$

вмѣстѣ съ неравенствами

$$c \leqq Y \leqq \partial$$

представить двукратнымъ интеграломъ

$$\int_c^\partial \int_a^b f(x) f_1(y)\, dx\, dy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^\partial f_1(y)\, dy,$$

сохраняя теорему умноженія вѣроятностей.

И вообще интегралъ

$$\int\int f(x)\,f_1(y)\,dx\,dy,$$

распространенный на всѣ значенія x и y, которыя удовлетворяютъ тѣмъ или другимъ неравенствамъ, будетъ выражать у насъ вѣроятность, что X и Y удовлетворяютъ подобнымъ же неравенствамъ.

Если же мы не находимъ возможнымъ разсматривать какія нибудь величины X и Y какъ независимыя; то вѣроятность, что X и Y удовлетворяютъ опредѣленнымъ неравенствамъ, мы будемъ выражать двукратнымъ интеграломъ

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy \qquad (14),$$

распространеннымъ на значенія x и y, которыя удовлетворяютъ такимъ же неравенствамъ.

При этомъ функцію $\varphi(x, y)$, двухъ чиселъ x и y, мы назовемъ также плотностью вѣроятности и будемъ устанавливать ее болѣе или менѣе произвольно, наблюдая однако, чтобы она не получала отрицательныхъ значеній и чтобы интегралъ

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy$$

приводился къ единицѣ, при распространеніи его на всѣ возможныя значенія x и y.

Простѣйшее предположеніе о функціи $\varphi(x, y)$ состоитъ въ томъ, что она сохраняетъ постоянную величину для значеній x и y, удовлетворяющихъ извѣстнымъ неравенствамъ, и обращается въ нуль для прочихъ значеній x и y.

При такомъ предположеніи, обращаясь къ геометрическимъ соображеніямъ и разсматривая X и Y какъ обыкновенныя координаты точки на плоскости, мы легко приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Если $\varphi(x, y)$ мы разсматриваемъ какъ функцію координатъ x и y различныхъ точекъ плоскости, и если S означаетъ величину всей площади, внутри которой $\varphi(x, y)$ сохраняетъ постоян-

ное значеніе, отличное отъ нуля, а s означаетъ величину какой-нибудь площади, составляющей часть первой; то отношеніе

$$\frac{s}{S}$$

выразитъ величину вѣроятности, что точка, опредѣляемая координатами X и Y, лежитъ внутри послѣдней площади, величина которой равна s.

Расширенію понятія о вѣроятности соотвѣтствуетъ и расширеніе понятія о математическомъ ожиданіи; именно, математическимъ ожиданіемъ $\psi(x, y)$ мы назовемъ интегралъ

$$\int\int \psi(x, y)\ \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad (15),$$

распространенный на всѣ значенія x и y.

Сказанное нами о двухъ величинахъ X и Y легко распространить на любое число подобныхъ величинъ, на чемъ мы не считаемъ нужнымъ останавливаться.

Приложимъ указанныя нами основанія къ ряду задачъ, начиная съ той, которую мы разсматривали, въ предыдущемъ параграфѣ, на другихъ основаніяхъ.

§ 27. *Задача 1ᵃ*. Прямая линія AB раздѣлена точкою C на двѣ опредѣленныя части.

Затѣмъ таже прямая раздѣлена на три части двумя точками P и Q, изъ которыхъ первая поставлена, на удачу, на AC, а вторая поставлена, также на удачу, на CB.

A —P——C——————Q— B

Требуется опредѣлить вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника.

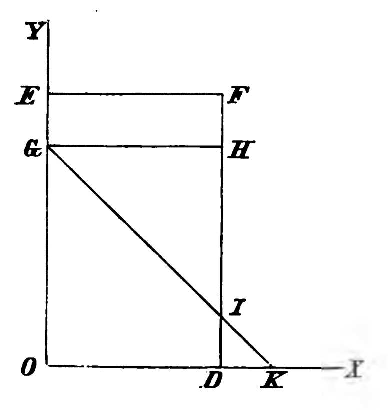
Рѣшеніе. Обращаясь къ геометрическимъ соображеніямъ будемъ разсматривать длины AP и BQ какъ обыкновенныя пря-

молинейныя прямоугольныя координаты

$$X,\ Y$$

нѣкоторой точки M на плоскости.

На приложенномъ чертежѣ



$$OD = AC,\ OE = CB > AC,$$

$$OG = OK = \frac{AB}{2}$$

$$OY \perp OX,\ GH \parallel EF \parallel OX,$$

$$DH \parallel OY.$$

Разсматриваемая точка M во всѣхъ случаяхъ лежитъ внутри прямоугольника $OEFD$.

Въ тѣхъ же случаяхъ, когда

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника, координаты точки M должны удовлетворять неравенствамъ

$$X < \frac{AB}{2},\quad Y < \frac{AB}{2},\quad X + Y > \frac{AB}{2},$$

при выполненіи которыхъ точка M лежитъ внутри трехугольника GHJ.

Поэтому искомая вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника выразится отношеніемъ площади трехугольника GHJ къ площади прямоугольника $OEFD$, если только мы будемъ считать всѣ положенія точки M внутри прямоугольника $OEFD$ равновозможными, т. е. будемъ считать $\varphi(x, y)$ числомъ постояннымъ внутри прямоугольника $OEFD$.

Замѣчая наконецъ, что отношеніе площади трехугольника

GHJ къ площади прямоугольника *OEFD* равно

$$\frac{1}{2}\frac{AC}{BC},$$

приходимъ къ тому же выраженію искомой вѣроятности, которое было выведено раньше другимъ путемъ.

При другихъ предположеніяхъ о плотности вѣроятности придемъ, конечно, къ инымъ выводамъ.

Напримѣръ, если плотность вѣроятности для различныхъ положеній точки *M* будемъ считать пропорціональною произведенію координатъ ея, то разсматриваемая нами вѣроятность выразится отношеніемъ интеграловъ

$$\frac{\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=\frac{a+b}{2}-x}^{y=\frac{a+b}{2}} xydydx}{\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b} xy\,dx\,dy},$$

гдѣ буквой a мы обозначили длину AC и буквой b длину BC.

Такъ какъ

$$\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=\frac{a+b}{2}-x}^{y=\frac{a+b}{2}} xy\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=a}\frac{x^2(a+b-x)}{2}dx = \frac{a^3(4b+a)}{24}$$

и

$$\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b} xy\,dy\,dx = \frac{a^2b^2}{4},$$

то при новомъ предположеніи разсматриваемая нами вѣроятность оказывается равною

$$\frac{1}{2}\,\frac{a}{b}\cdot\frac{4b+a}{3b}$$

и потому отличается отъ полученной прежде множителемъ

$$\frac{4b+a}{3b}.$$



Въ частномъ случаѣ, когда

$$AC = BC,$$

вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника, равна $\frac{1}{2}$ при первомъ предположеніи и $\frac{5}{6}$ при второмъ.

Задача 2. На прямой линіи AB поставлены на удачу двѣ точки, изъ которыхъ ближайшую къ A мы обозначимъ буквою P, а ближайшую къ B обозначимъ буквою Q.

A P Q B

Требуется опредѣлить вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника.

Рѣшеніе. Разсматривая по прежнему

$$AP \text{ и } QB$$

какъ обыкновенныя координаты

$$X,\ Y$$

нѣкоторой точки на плоскости, имѣемъ

$$X > 0,\quad Y > 0,\quad X + Y < AB.$$

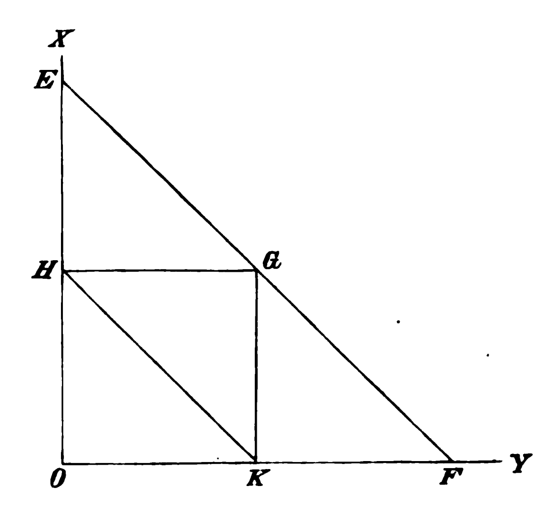
Отсюда слѣдуетъ, что точка M лежитъ внутри трехугольника EOF ограниченнаго осями координатъ OX, OY и прямою EF, которая отсѣкаетъ отъ координатныхъ осей отрѣзки

$$OE,\ OF$$

равные AB.

Для всѣхъ положеній точки M, внутри трехугольника EOF, мы будемъ считать плотность вѣроятности одинаковою, и соотвѣтственно этому скажемъ, что всѣ случаи дѣленія прямой AB,

двумя точками P и Q, на три части представляются намъ равновозможными.



При такихъ условіяхъ разысканіе искомой вѣроятности сводится къ вычисленію величины площади, внутри которой лежитъ точка M въ тѣхъ и только въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$AP,\ PQ \text{ и } QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника: отношеніе этой площади къ площади трехугольника EOF выразитъ искомую вѣроятность.

Съ другой стороны мы знаемъ, что

$$AP = X,\ PQ = AB - X - Y,\ QB = Y$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника тогда и только тогда, когда

$$X < \frac{AB}{2},\ Y < \frac{AB}{2},\ X + Y > \frac{AB}{2}.$$

При выполненіи этихъ неравенствъ точка M лежитъ внутри трехугольника HGK, ограниченнаго прямыми HG, GK, HK, которыя соединяютъ средины прямыхъ OE, EF и OF; и обратно

для всѣхъ положеній точки M внутри трехугольника HGK эти неравенства выполнены.

Отсюда уже нетрудно заключить, что искомая вѣроятность выражается отношеніемъ

$$\frac{\Delta HGK}{\Delta OEF},$$

которое равно $\frac{1}{4}$.

Итакъ, если всѣ случаи дѣленія прямой AB на три части

$$AP,\ PQ,\ QB$$

мы признаемъ равновозможными, въ объясненномъ выше смыслѣ; то вѣроятность, что изъ этихъ трехъ частей можно образовать трехугольникъ, равна $\frac{1}{4}$.

§ 28. *Задача 3ья (Бюффона).*

На плоскость, покрытую рядомъ параллельныхъ полосъ одной и той-же ширины h, брошена на удачу безконечно тонкая игла, длина которой l меньше ширины полосъ h.

Найти вѣроятность, что эта игла не помѣстится вся въ одной полосѣ, а пересѣчетъ одну изъ прямыхъ, отдѣляющихъ двѣ смежныя полосы.

Рѣшеніе.

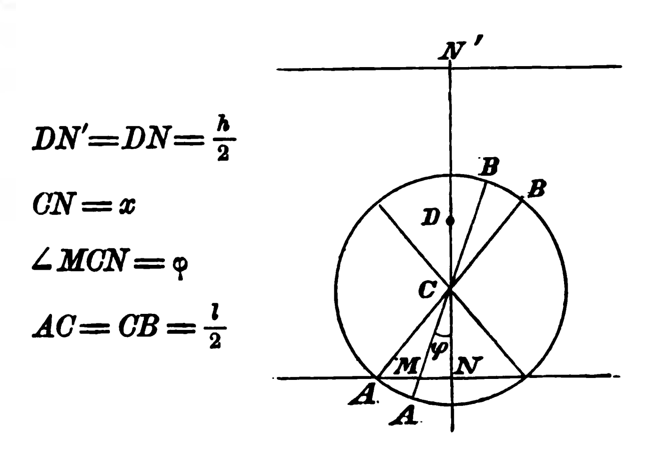
Разсматривая различныя возможныя положенія иглы на плоскости, назовемъ буквою x разстояніе средины иглы до ближайшей изъ параллельныхъ прямыхъ, образующихъ выше упомянутыя полосы; а буквою φ назовемъ наименьшій изъ угловъ, которые образуетъ игла съ перпендикуляромъ къ направленію полосъ.

Всѣ возможныя значенія x заключаются между 0 и $\frac{1}{2}h$; мы будемъ считать ихъ равновозможными.

Точно также мы будемъ считать равновозможными и всѣ возможныя значенія φ, которыя заключаются между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

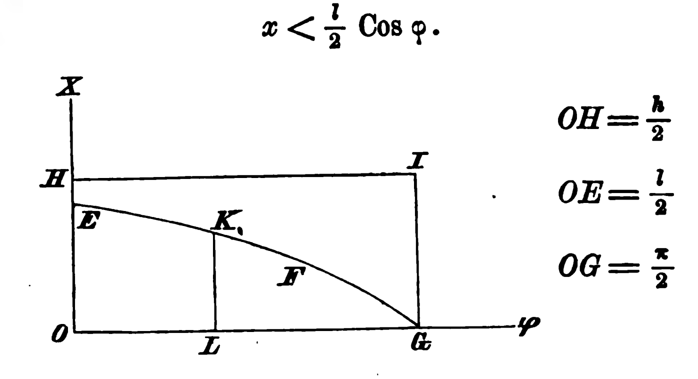
Затѣмъ для большей наглядности выводовъ возьмемъ произвольную длину за единицу мѣры и будемъ разсматривать x и

φ какъ обыкновенныя прямолинейныя прямоугольныя координаты нѣкоторой точки M плоскости.



Изъ чертежа видно, что игла не помѣщается внутри одной полосы въ тѣхъ и только тѣхъ случаяхъ, когда

$$x < \frac{l}{2} \operatorname{Cos} \varphi .$$



Обращаясь ко второму чертежу, замѣчаемъ, что положенія точки M, соотвѣтствующія только что указаннымъ случаямъ, отдѣляются отъ остальныхъ возможныхъ ея положеній кривою линіею $EKFG$, которая опредѣляется уравненіемъ

$$x = \frac{l}{2} \operatorname{Cos} \varphi ,$$

и заполняютъ площадь *OEKFGO*, ограниченную осями координатъ и кривою *EKFG*.

Слѣдовательно, при сдѣланныхъ предположеніяхъ, искомая вѣроятность, что игла не помѣстится въ одной полосѣ выразится отношеніемъ площади *OEKFGO* къ площади прямоугольникъ *OHJG*, которое равно

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \operatorname{Cos} \varphi \, d\varphi}{\frac{h}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{h\pi}.$$

Эта замѣчательная задача поставлена Бюффономъ какъ первый примѣръ исчисленія вѣроятностей, требующій геометрическихъ соображеній.

Краткое указаніе на неё можно найти въ Histoire de l'Académie Royale des Sciences, за 1733 годъ; а ея рѣшеніе, согласное съ выше приведеннымъ, дано въ сочиненіи Бюффона «Essai d'arithmétique morale», которое появилось въ 1777 году какъ добавленіе къ естественной исторіи Бюффона.

По поводу задачи Бюффона можно упомянуть о Цюрихскомъ профессорѣ астрономѣ Р. Вольфѣ, который въ теченіе многихъ лѣтъ производилъ рядъ опытовъ для выясненія вопроса о приложимости выводовъ исчисленія вѣроятности къ дѣйствительности, на основаніи теоремы Бернулли.

Мы приведемъ результаты только тѣхъ опытовъ Р. Вольфа, которые относятся къ задачѣ Бюффона.

Въ опытахъ Р. Вольфа ширина полосъ была 45 миллиметровъ, а длина бросаемой иглы 36 миллиметровъ, и потому вѣроятность не помѣщенія иглы въ одной полосѣ, на основаніи формулы Бюффона, выражалась числомъ

$$\frac{72}{45\pi} \doteqdot 0{,}5093$$

Игла была брошена на плоскость 5000 разъ, причемъ 2468 разъ она помѣстилась вся внутри одной полосы, а 2532 раза от-

части въ одной отчасти въ другой полосѣ; такъ что отношеніе числа бросаній, при которыхъ игла не помѣстилась внутри одной полосы, къ числу всѣхъ бросаній равно

$$\frac{2532}{5000} = 0,5064$$

и довольно близко подходитъ къ указанной выше вѣроятности непомѣщенія иглы въ одной полосѣ.

Въ этомъ результатѣ можно усмотрѣть нѣкоторое подтвержденіе теоремы Бернулли опытомъ.

Интересно замѣтить, что результатомъ опытовъ Р. Вольфа можно было бы воспользоваться и для вычисленія числа π; стоитъ только, на основаніи теоремы Бернулли, допустить приближенное равенство

$$\frac{72}{45\pi} \doteq \frac{2532}{5000}.$$

Такимъ образомъ находимъ для π величину

$$3,159\ldots,$$

которая отличается отъ истинной менѣе чѣмъ на

$$0,02.$$

§ 29. *Задача 4ᵃʲ*. (Обобщеніе задачи Бюффона).

На плоскость, покрытую по прежнему рядомъ параллельныхъ полосъ одной и той же ширины h, брошена на удачу площадка, ограниченная выпуклымъ контуромъ и настолько малая, что ни въ какомъ случаѣ она не можетъ лечь сразу въ трехъ полосахъ, а должна помѣститься вся въ одной полосѣ, или отчасти въ одной отчасти въ другой полосѣ.

Найти вѣроятность, что эта площадка не помѣстится вся въ одной полосѣ.

Рѣшеніе. Начнемъ съ предположенія, что площадка, брошенная на плоскость, ограничена выпуклымъ многоугольникомъ и для опредѣленности остановимся на случаѣ пятиугольника.

Стороны этого пятиугольника мы отличимъ другъ отъ друга буквами

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,$$



которыми будемъ обозначать соотвѣтственнымъ образомъ и длины сторонъ.

Затѣмъ, чтобы привести новую задачу къ прежней, замѣтимъ, что во всѣхъ случаяхъ, когда площадка не помѣстится внутри одной полосы, двѣ стороны контура будутъ пересѣчены одною изъ прямыхъ, разграничивающихъ полосы.

На основаніи этого замѣчанія мы разобьемъ событіе, вѣроятность котораго требуется найти, на 10 видовъ

$$ab,\ ac,\ a\partial,\ ae,\ bc,\ b\partial,\ be,\ c\partial,\ ce,\ \partial e:$$

видъ ab состоитъ въ пересѣченіи сторонъ a и b одною изъ прямыхъ, разграничивающихъ полосы; видъ ac состоитъ въ пересѣченіи сторонъ a и c одною изъ тѣхъ же прямыхъ и т. д.

Указанные 10 видовъ мы будемъ разсматривать какъ несовмѣстные, приписывая вѣроятность нуль всѣмъ случаямъ, когда одна изъ вершинъ пятиугольника лежитъ, какъ разъ, на границѣ двухъ полосъ.

Обозначивъ вѣроятности событій

$$ab,\ ac,\ a\partial,\ ae,\ bc,\ b\partial,\ be,\ c\partial,\ ce,\ \partial e$$

символами

$$(ab),\ (ac),\ (a\partial),\ (ae),\ (bc),\ (b\partial),\ldots,$$

а искомую вѣроятность, что площадка ляжетъ отчасти въ одной отчасти въ другой полосѣ, буквою P, мы на основаніи теоремы сложенія вѣроятностей установимъ равенство

$$P=(ab)+(ac)+(a\partial)+(ae)+(bc)+(b\partial)+(be)+(c\partial)+(ce)+(\partial e).$$

Въ силу той же теоремы сложенія вѣроятностей имѣемъ

$$(a)=(ab)+(ac)+(a\partial)+(ae),$$

$$(b)=(ab)+(bc)+(b\partial)+(be),$$

$$(c)=(ac)+(bc)+(c\partial)+(ce),$$

$$(\partial)=(a\partial)+(b\partial)+(c\partial)+(\partial e),$$

$$(e)=(ae)+(be)+(ce)+(\partial e),$$

гдѣ (a) означаетъ вѣроятность, что сторона a пройдетъ изъ одной полосы въ другую, (b) означаетъ подобную же вѣроятность для стороны b и т. д.

Послѣднія вѣроятности на основаніи выше указаннаго рѣшенія задачи Бюффона опредѣляются равенствами

$$(a)=\frac{2a}{h\pi},\quad (b)=\frac{2b}{h\pi},\quad (c)=\frac{2c}{h\pi},$$

$$(\partial)=\frac{2\partial}{h\pi},\quad (e)=\frac{2e}{h\pi}.$$

Изъ вышеприведенныхъ равенствъ находимъ, что сумма

$$(a)+(b)+(c)+(\partial)+(e)$$

равна какъ числу

$$\frac{2(a+b+c+\partial+e)}{h\pi}$$

такъ и удвоенной суммѣ

$$(ab)+(ac)+(a\partial)+(ae)+(bc)+(b\partial)+(be)+(c\partial)+(ce)+(\partial e),$$

которая выражаетъ искомую вѣроятность P.

Слѣдовательно

$$2P=\frac{2(a+b+c+\partial+e)}{h\pi}$$

и потому искомая вѣроятность P равна отношенію

$$\frac{a+b+c+\partial+e}{h\pi}$$

длины контура къ произведенію ширины полосъ на число π.

И не трудно понять, что этотъ выводъ относится не только къ пятиугольнику, но и къ любому выпуклому, достаточно малому, многоугольнику.

А затѣмъ, по способу предѣловъ, можно распространить тотъ же выводъ и на криволинейные контуры.

Итакъ искомая нами вѣроятность, что брошенная площадка не помѣстится вся внутри одной полосы, выражается отношеніемъ длины контура площадки къ произведенію ширины полосъ на число π.

§ 30. *Задача 5ая.*

На плоскость, покрытую сѣтью равныхъ трехугольниковъ, брошена безконечно тонкая игла, длина которой l меньше каждой изъ высотъ трехугольниковъ. Найти вѣроятность, что эта игла помѣстится вся внутри одного трехугольника.

Рѣшеніе. Пусть ABC будетъ тотъ изъ трехугольниковъ сѣти, внутрь котораго попала средина иглы; величины угловъ его обозначимъ буквами

$$A,\ B,\ C$$

а величины сторонъ малыми буквами

$$a,\ b,\ c.$$

Всѣ положенія средины иглы будемъ считать равновозможными при всякомъ направленіи иглы.

Предполагая затѣмъ, что игла имѣетъ какое нибудь данное направленіе, проведемъ черезъ вершины трехугольника ABC, параллельно направленію иглы, прямыя

$$LAL',\ MBM',\ NCN',$$

которыя въ точкахъ A, B, C дѣлятся пополамъ и имѣютъ туже длину l, какъ и игла.

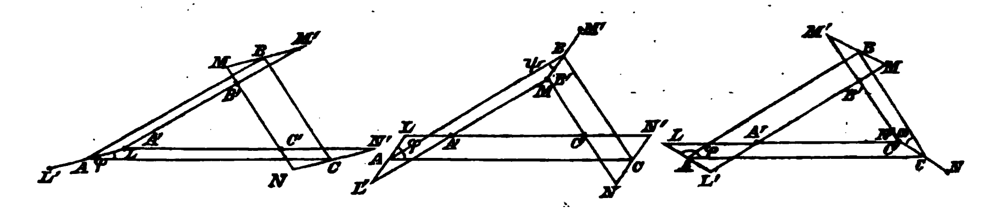
Если концы этихъ прямыхъ соединить надлежащимъ образомъ прямыми параллельными сторонамъ трехугольника ABC, то получится внутри трехугольника ABC другой трехугольникъ $A'B'C'$, отдѣляющій для даннаго направленія иглы тѣ положенія средины ея, при которыхъ она лежитъ вся внутри ABC, отъ остальныхъ возможныхъ положеній средины иглы; такъ что въ тѣхъ случаяхъ, когда игла имѣетъ разсматриваемое направленіе, средина ея должна лежать внутри $A'B'C'$ для того, чтобы вся игла помѣщалась внутри ABC.

Построеніе трехугольника $A'B'C'$ видно изъ чертежей.

Изъ этихъ чертежей видно также, что направленіе иглы можно опредѣлять угломъ

$$\varphi = \angle LAC,$$

который въ случаѣ перваго чертежа лежитъ между 0 и A, въ случаѣ втораго чертежа между A и $A+B$ и наконецъ въ случаѣ третьяго чертежа между $A+B$ и $A+C+B=\pi$.



Кромѣ φ полезно разсматривать въ случаѣ второго чертежа уголъ

$$\psi=\angle MBA=\varphi-A,$$

и въ случаѣ третьяго чертежа уголъ

$$\omega=\angle N'CB=\varphi-A-B.$$

Всѣ направленія иглы мы будемъ считать равновозможными въ томъ смыслѣ, что всѣ величины φ отъ 0 до π будемъ разсматривать какъ равновозможныя.

При такихъ условіяхъ искомая вѣроятность, что вся игла помѣстится внутри одного трехугольника разсматриваемой сѣти, выразится интеграломъ

$$\int_0^\pi \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\cdot\frac{d\varphi}{\pi},$$

который равенъ суммѣ

$$\int_0^A \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\cdot\frac{d\varphi}{\pi}+\int_0^B \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\cdot\frac{d\psi}{\pi}+\int_0^C \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\cdot\frac{d\omega}{\pi}.$$

Обращаясь къ интегралу

$$\int_0^A \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\,\frac{d\varphi}{\pi}$$

замѣчаемъ, что отношеніе площадей трехугольниковъ

$$A'B'C' \text{ и } ABC$$

равно квадрату отношенія ихъ соотвѣтственныхъ сторонъ, и изъ перваго чертежа находимъ

$$A'C' = AC - C'N' = b - l\frac{\operatorname{Sin}(C+\varphi)}{\operatorname{Sin} C}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC} = \left(\frac{A'C'}{AC}\right)^2 = \left\{1 - \frac{l\operatorname{Sin}(C+\varphi)}{b\operatorname{Sin} C}\right\}^2$$

$$= 1 - \frac{2l\operatorname{Sin}(C+\varphi)}{b\operatorname{Sin} C} + \frac{l^2\operatorname{Sin}^2(C+\varphi)}{b^2\operatorname{Sin}^2 C}$$

$$= 1 - \frac{2l\operatorname{Sin}(C+\varphi)}{b\operatorname{Sin} C} + \frac{l^2[1-\operatorname{Cos}2(C+\varphi)]}{2b^2\operatorname{Sin}^2 C}$$

и потому

$$\int_0^A \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\frac{d\varphi}{\pi} = \frac{A}{\pi}\left(1 + \frac{l^2a^2}{2Q^2}\right) - \frac{2la(\operatorname{Cos}B + \operatorname{Cos}C)}{Q\pi}$$

$$+ \frac{l^2a^2(\operatorname{Sin}2B + \operatorname{Sin}2C)}{4Q^2\pi},$$

гдѣ Q означаетъ удвоенную площадь трехугольника ABC, т. е. равно

$$ab\operatorname{Sin}C = ac\operatorname{Sin}B = bc\operatorname{Sin}A.$$

Подобнымъ же образомъ, при помощи второго и третьяго чертежа, находимъ

$$\int_0^B \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\frac{d\psi}{\pi} = \frac{B}{\pi}\left(1 + \frac{l^2b^2}{2Q^2}\right) - \frac{2lb(\operatorname{Cos}A + \operatorname{Cos}C)}{Q\pi}$$

$$+ \frac{l^2b^2(\operatorname{Sin}2A + \operatorname{Sin}2C)}{4Q^2\pi}$$

и

$$\int_0^C \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\frac{d\omega}{\pi} = \frac{C}{\pi}\left(1 + \frac{l^2c^2}{2Q^2}\right) - \frac{2lc(\operatorname{Cos}B + \operatorname{Cos}A)}{Q\pi}$$

$$+ \frac{l^2c^2(\operatorname{Sin}2B + \operatorname{Sin}2A)}{4Q^2\pi}.$$

Остается сложить найденныя величины трехъ интеграловъ, и мы получимъ выраженіе искомой вѣроятности въ видѣ алге-

браической суммы

$$1+\frac{l^2}{2\pi}\frac{Aa^2+Bb^2+Cc^2}{Q^2}-\frac{2l}{\pi}\frac{a(\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C)+b(\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}C)+c(\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B)}{Q}$$

$$+\frac{l^2}{4\pi}\frac{a^2(\operatorname{Sin}2B+\operatorname{Sin}2C)+b^2(\operatorname{Sin}2A+\operatorname{Sin}2C)+c^2(\operatorname{Sin}2A+\operatorname{Sin}2B)}{Q^2}.$$

Для упрощенія полученнаго выраженія обратимъ вниманіе на простыя равенства

$$a\operatorname{Cos}B+b\operatorname{Cos}A=c,\quad a^2\operatorname{Sin}2B+b^2\operatorname{Sin}2A=2Q,$$

$$a\operatorname{Cos}C+c\operatorname{Cos}A=b,\quad a^2\operatorname{Sin}2C+c^2\operatorname{Sin}2A=2Q,$$

$$b\operatorname{Cos}C+c\operatorname{Cos}B=a,\quad b^2\operatorname{Sin}2C+c^2\operatorname{Sin}2B=2Q;$$

въ силу которыхъ должно быть

$$a(\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C)+b(\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}C)+c(\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B)=a+b+c$$

и

$$a^2(\operatorname{Sin}2B+\operatorname{Sin}2C)+b^2(\operatorname{Sin}2A+\operatorname{Sin}2C)+c^2(\operatorname{Sin}2A+\operatorname{Sin}2B)=6Q.$$

Пользуясь этими равенствами, находимъ, что искомая вѣроятность можетъ быть представлена алгебраическою суммою

$$1+\frac{l^2(Aa^2+Bb^2+Cc^2)}{2\pi Q^2}-\frac{l(4a+4b+4c-3l)}{2\pi Q}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда сѣть состоитъ изъ равносторонныхъ трехугольниковъ, имѣемъ

$$A=B=C=\frac{\pi}{8},\quad a=b=c,\quad Q=a^2\frac{\sqrt{3}}{2};$$

тогда найденное нами выраженіе вѣроятности, что игла помѣстится вся внутри одного трехугольника, приводится къ слѣдующему

$$1+\frac{2}{3}\left(\frac{l}{a}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{l}{a}\left(4-\frac{l}{a}\right).$$

Этотъ частный случай задачи былъ разсмотрѣнъ Буняковскимъ въ мемуарѣ «О приложеніи анализа вѣроятностей къ опре-



дѣленію приближенныхъ величинъ трансцендентныхъ чиселъ»*) и въ сочиненіи «Основанія математической теоріи вѣроятностей».

Но благодаря неудачному выбору порядка интегрированія вычисленія Буняковскаго отличаются значительною сложностью, которой и слѣдуетъ приписать погрѣшность, вкравшуюся въ окончательный результатъ этихъ вычисленій.

Полагая для примѣра

$$l=\frac{a}{\sqrt{8}},$$

получимъ для искомой вѣроятности величину

$$1+\frac{2}{9}-\frac{1}{\pi}\left(4-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\neq 0{,}1328.$$

Много задачъ, подобныхъ разсмотрѣннымъ нами въ этой главѣ, можно найти въ книгѣ Czuber «Geometrische Wahrscheinlichkeiten».

---

*) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VI Série, Sciences Mathém. et Phys. T. I. (III),

ГЛАВА VI.

Вѣроятности гипотезъ и будущихъ событій.

§ 31. Въ этой главѣ мы займемся разсмотрѣніемъ ряда вопросовъ объ измѣненіи вѣроятности съ измѣненіемъ данныхъ.

Наши выводы будутъ основаны на слѣдующей теоремѣ, которая представляетъ прямое слѣдствіе теоремы умноженія вѣроятностей и можетъ быть названа *теоремой дѣленія* вѣроятностей.

Теорема. *Вѣроятность событія B, когда извѣстно существованіе событія A, равна отношенію вѣроятности появленія обоихъ событій A и B, вмѣстѣ, къ вѣроятности событія A.*

Эта теорема выражается формулою

$$(B, A) = \frac{(AB)}{(A)} \qquad (16)$$

которая вытекаетъ изъ установленнаго ранѣе равенства

$$(AB) = (A)\,(B, A).$$

Теорему дѣленія вѣроятностей мы примѣнимъ прежде всего къ рѣшенію такой задачи.



Задача 1ая.

Пусть, при существованіи событія A, событія

$$B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_n$$

будутъ единственно возможными и несовмѣстными.

Пусть далѣе

$$(B_1), (B_2), \ldots, (B_i), \ldots, (B_n)$$

означаютъ ихъ вѣроятности, пока существованіе или несуществованіе событія A остается неизвѣстнымъ; а символъ

$$(A, B_i)$$

означаетъ вѣроятность событія A, когда установлено существованіе событія B_i; пусть наконецъ символъ

$$(B_i, A)$$

означаетъ вѣроятность событія B_i, когда установлено уже существованія событія A.

По даннымъ

$$(B_1), (B_2), \ldots, (B_n),$$

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n)$$

требуется вычислить

$$(B_1, A), (B_2, A), \ldots, (B_n, A).$$

Рѣшеніе.

Согласно теоремѣ дѣленія вѣроятностей имѣемъ

$$(B_i, A) = \frac{(AB_i)}{(A)}.$$

Съ другой стороны, по теоремѣ умноженія вѣроятностей находимъ

$$(AB_i) = (B_i)\,(A, B_i).$$

Разбивая наконецъ событіе A на виды

$$AB_1, AB_2, \ldots, AB_n,$$

въ силу теоремы сложенія вѣроятностей получаемъ

$$(A) = (AB_1) + (AB_2) + \dots + (AB_n).$$

Слѣдовательно имѣемъ

$$(A) = (B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2) + \dots + (B_n)(A, B_n)$$

и наконецъ

$$(B_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)}{(B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2) + \dots + (B_n)(A, B_n)} \quad (17).$$

Разсматривая событія

$$B_1,\ B_2, \dots,\ B_n$$

какъ гипотезы, придуманныя для объясненія появившагося событія A, мы можемъ назвать послѣднюю формулу, въ отличіе отъ другихъ, *формулою для опредѣленія вѣроятностей гипотезъ*.

Она извѣстна также подъ именемъ *формулы Байеса*.

Присоединимъ теперь къ событіямъ

$$A, B_1,\ B_2, \dots,\ B_n$$

новое событіе C и поставимъ слѣдующую задачу.

Задача 2-ая. По даннымъ

$$(B_1),\ (B_2), \dots,\ (B_n),$$

$$(A, B_1),\ (A, B_2), \dots,\ (A, B_n),$$

$$(C, AB_1),\ (C, AB_2), \dots,\ (C, AB_n)$$

найти (C, A), *т. е. опредѣлить вѣроятность событія* C, *когда существованіе событія* A *установлено.*

Рѣшеніе.

По условіямъ вопроса событія

$$B_1,\ B_2, \dots,\ B_n$$

должны быть единственно возможными и несовмѣстными при существованіи событія A.

Поэтому при существованіи событія A мы можемъ разбить событіе C на несовмѣстные виды

$$CB_1,\ CB_2, \ldots,\ CB_n$$

и въ силу теоремы сложенія вѣроятностей имѣемъ

$$(C, A) = (CB_1, A) + (CB_2, A) + \ldots + (CB_n, A).$$

Примѣняя затѣмъ къ слагаемымъ послѣдней суммы теорему умноженія вѣроятностей, получаемъ

$$(CB_i, A) = (B_i, A)\,(C, AB_i);$$

наконецъ для выраженія (B_i, A) нами была уже установлена формула

$$(B_i, A) = \frac{(B_i)\,(A, B_i)}{(B_1)\,(A, B_1) + \ldots + (B_n)\,(A, B_n)},$$

которая рѣшаетъ предыдущую задачу.

Слѣдовательно

$$(CB_i, A) = \frac{(B_i)\,(A, B_i)\,(C, AB_i)}{(B_1)\,(A, B_1) + \ldots + (B_n)\,(A, B_n)}$$

и

$$(C, A) = \frac{(B_1)\,(A, B_1)\,(C, AB_1) + \ldots + (B_n)\,(A, B_n)\,(C, AB_n)}{(B_1)\,(A, B_1) + \ldots + (B_n)\,(A, B_n)} \quad (18).$$

Разсматривая событіе A какъ случившееся а C какъ возможное будущее событіе, мы можемъ назвать послѣднюю формулу, въ отличіе отъ другихъ, *формулою для выраженія вѣроятностей будущихъ событій.*

Важно отмѣтить одно упрощеніе этой формулы.

Событія C и A, конечно, предполагаются зависящими другъ отъ друга, но они могутъ становиться независимыми по выясненіи, какое именно изъ событій

$$B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$$

имѣетъ мѣсто.

Если событія C и A не зависятъ другъ отъ друга, когда выяснено, какое именно изъ событій

$$B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$$

имѣетъ мѣсто, то каждая изъ вѣроятностей

$$(C, AB_i),$$

которыя входятъ въ разсматриваемую нами формулу, совпадаетъ съ соотвѣтствующею вѣроятностью

$$(C, B_i)$$

быть событію C при существованіи B_i.

Тогда найденная выше формула принимаетъ болѣе простой видъ

$$(C, A) = \frac{(B_1)\,(A, B_1)\,(C, B_1) + \ldots + (B_n)\,(A, B_n)\,(C, B_n)}{(B_1)\,(A, B_1) + \ldots + (B_n)\,(A, B_n)} \quad (19).$$

Для поясненія установленныхъ формулъ разсмотримъ рядъ простыхъ частныхъ примѣровъ.

Первый примѣръ.

Взятъ на удачу одинъ изъ 14 сосудовъ, о которыхъ извѣстно, что 9 изъ нихъ содержатъ по 5 бѣлыхъ и по 8 черныхъ шаровъ а остальные 5 содержатъ по 11 бѣлыхъ и по 2 черныхъ шара, и что ни одинъ изъ нихъ не содержитъ иныхъ шаровъ кромѣ бѣлыхъ и черныхъ.

Изъ этого сосуда вынутъ одинъ шаръ на удачу и оказался бѣлымъ.

Спрашивается, какъ велика, при такихъ данныхъ, вѣроятность, что взятъ былъ одинъ изъ девяти сосудовъ, содержащихъ по 5 бѣлыхъ и по 8 черныхъ шаровъ?

Затѣмъ требуется опредѣлить вѣроятность, что второй шаръ, вынутый изъ того же сосуда, будетъ также бѣлымъ.

Примѣненіе формулъ.

Пусть событіе B_1 состоитъ въ томъ, что взятый сосудъ содержалъ 5 бѣлыхъ и 8 черныхъ шаровъ, а событіе B_2 въ томъ, что взятый сосудъ содержалъ 11 бѣлыхъ и 2 черныхъ шара.



Пусть далѣе событіе A состоитъ въ бѣломъ цвѣтѣ перваго вынутаго шара, а событіе C въ бѣломъ цвѣтѣ втораго вынутаго шара.

Тогда, придерживаясь установленныхъ обозначеній, имѣемъ

$$(B_1)=\frac{9}{14},\quad (B_2)=\frac{5}{14},$$

$$(A, B_1)=\frac{5}{13},\quad (A, B_2)=\frac{11}{13},$$

а искомыми величинами будутъ

$$(B_1, A) \quad \text{и} \quad (C, A).$$

Первая изъ нихъ

$$(B_1, A)$$

представляетъ вѣроятность, что бѣлый шаръ былъ вынутъ изъ сосуда, содержащаго 9 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ.

Опредѣляя ее по вышеуказанной формулѣ, находимъ

$$(B_1, A)=\frac{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}}{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}=\frac{9}{20},$$

подобнымъ же образомъ получимъ

$$(B_2, A)=\frac{\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}=\frac{11}{20}.$$

Интересно замѣтить, что

$$(B_1)>(B_2), \quad \text{а} \quad (B_1, A)<(B_2, A).$$

Переходимъ къ величинѣ

$$(C, A),$$

которая представляетъ вѣроятность, что второй вынутый шаръ будетъ бѣлымъ, какъ и первый.

Для вычисленія ея по формулѣ

$$(C, A) = \frac{(B_1)(A, B_1)(C, AB_1) + (B_2)(A, B_2)(C, AB_2)}{(B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2)}$$

мы должны установить величины

$$(C, AB_1) \quad \text{и} \quad (C, AB_2).$$

Величина

$$(C, AB_1)$$

представляетъ вѣроятность вынуть послѣ одного бѣлаго шара второй бѣлый шаръ изъ сосуда, который до начала этихъ выниманій содержалъ 5 бѣлыхъ и 8 черныхъ шаровъ.

Предполагая, что первый вынутый шаръ не былъ возвращенъ назадъ въ сосудъ, имѣемъ

$$(C, AB_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3};$$

такъ какъ второй вынутый шаръ долженъ принадлежать къ числу двѣнадцати шаровъ, среди которыхъ 4 бѣлыхъ и 8 черныхъ.

На подобныхъ же основаніяхъ имѣемъ

$$(C, AB_2) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Слѣдовательно

$$(C, A) = \frac{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} + \frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{10}{12}}{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13} + \frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}} = \frac{73}{120};$$

такъ опредѣляется вѣроятность бѣлаго цвѣта втораго шара, когда извѣстенъ бѣлый цвѣтъ перваго шара.

До тѣхъ же поръ, пока цвѣтъ перваго шара остается не опредѣленнымъ, вѣроятность бѣлаго цвѣта второго шара равна

$$(C) = (A) = \frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13} + \frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13} = \frac{100}{182} = \frac{50}{91}.$$

Второй примѣръ.

Изъ сосуда, содержащаго 3 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ

и не содержащаго никакихъ другихъ шаровъ, вынуто и переложено въ другой пустой сосудъ четыре шара.

Затѣмъ изъ этого втораго сосуда, содержащаго только четыре шара перваго сосуда, вынуто два шара, которые оказались оба бѣлыми.

Наконецъ изъ того же втораго сосуда вынутъ еще одинъ шаръ.

Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что этотъ послѣдній шаръ также бѣлый?

Примѣненіе формулъ. Зная, что изъ втораго сосуда вынуто два бѣлыхъ шара, мы можемъ относительно цвѣта шаровъ, переложенныхъ изъ перваго сосуда во второй, сдѣлать двѣ гипотезы:

1) два бѣлыхъ и два черныхъ, 2) три бѣлыхъ и одинъ черный.

Назвавъ эти гипотезы событіями

$$B_1 \quad \text{и} \quad B_2,$$

бѣлый цвѣтъ вынутыхъ двухъ шаровъ событіемъ A и бѣлый цвѣтъ послѣдняго шара событіемъ C, имѣемъ

$$(B_1) = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 1.\ 2} \cdot \frac{3.\ 2.\ 5.\ 4}{8.\ 7.\ 6.\ 5} = \frac{3}{7},$$

$$(B_2) = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 1} \cdot \frac{3.\ 2.\ 1.\ 5}{8.\ 7.\ 6.\ 5} = \frac{1}{14},$$

$$(A, B_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad (A, B_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

$$(C, AB_1) = 0, \quad (C, AB_2) = \frac{1}{2};$$

и потому искомая вѣроятность равна

$$\frac{\frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Этотъ выводъ вполнѣ согласенъ съ тѣмъ обстоятельствомъ,

что разсматриваемый шаръ долженъ принадлежать къ числу шести шаровъ, среди которыхъ находится только одинъ бѣлый.

Третій примѣръ.

Оставимъ всѣ условія и обозначенія втораго примѣра съ тою только разницею, что послѣдній шаръ, неизвѣстнаго цвѣта, будемъ считать вынутымъ не изъ втораго сосуда, а изъ перваго.

При такомъ предположеніи имѣемъ

$$(C, AB_1) = \frac{1}{4} = (C, B_1), \ (C, AB_2) = (C, B_2) = 0$$

и потому вѣроятность, что послѣдній шаръ бѣлый, равна

$$\frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{6};$$

какъ и должно быть, такъ какъ и этотъ шаръ принадлежитъ къ числу шести шаровъ, среди которыхъ находится только одинъ бѣлый.

Четвертый примѣръ.

Имѣемъ два сосуда L и M; сосудъ L содержитъ три шара, изъ которыхъ одинъ черный и два бѣлыхъ, а сосудъ M содержитъ шесть шаровъ, изъ которыхъ одинъ бѣлый и пять черныхъ.

Переложивъ на удачу изъ L въ M одинъ шаръ и вынувъ затѣмъ изъ M одинъ шаръ, мы замѣтили, что этотъ послѣдній шаръ бѣлаго цвѣта.

При такихъ условіяхъ требуется опредѣлить вѣроятность, что шаръ, переложенный изъ L въ M, былъ чернаго цвѣта.

Отвѣтъ.

Искомая вѣроятность равна

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{1}{5}.$$

§ 32. Воспользуемся установленными формулами для рѣшенія двухъ задачъ, предѣльный случай которыхъ, при одномъ частномъ предположеніи, встрѣчаетъ практическія примѣненія.

Задача 3ья. Разсматривается неограниченный рядъ испытаній, относительно которыхъ дано нижеслѣдующее.

По выясненіи нѣкоторыхъ обстоятельствъ эти испытанія становятся, относительно событія E, независимыми другъ отъ друга, и для всѣхъ ихъ вѣроятность событія E становится равною одному и тому же числу α.

Вышеупомянутыя обстоятельства не выяснены и число α остается не вполнѣ извѣстнымъ.

Относительно величины α можно сдѣлать n, и только n, предположеній:

$$\alpha=\alpha_1,\ \alpha=\alpha_2,\ldots,\ \alpha=\alpha_i,\ldots,\ \alpha=\alpha_n,$$

вѣроятности которыхъ, соотвѣтственно имѣющимся даннымъ, представляются числами

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_i,\ldots,\ p_n.$$

Требуется опредѣлить, какъ измѣнятся вѣроятности различныхъ предположеній о величинѣ α въ томъ случаѣ, когда сверхъ данныхъ, по которымъ установлены эти выраженія

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n,$$

будетъ извѣстно, что при k + l испытаніяхъ событіе E появилось k разъ и противоположное ему l разъ.

Иначе сказать, по даннымъ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_i,\ldots,\ \alpha_n,$$

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_i,\ldots,\ p_n,$$

требуется вычислить вѣроятность каждаго изъ предположеній

$$\alpha=\alpha_1,\ \alpha=\alpha_2,\ldots,\ \alpha=\alpha_n$$

послѣ того, какъ будетъ извѣстно, что при $k+l$ испытаніяхъ событіе E появилось ровно k разъ.

Рѣшеніе. Обозначимъ буквою A наблюденный результатъ $k+l$ испытаній, состоящій въ появленіи k разъ событія E и l разъ противоположнаго событія.

Затѣмъ вышеуказанныя предположенія о величинѣ числа α назовемъ событіями

$$B_1, B_2, \ldots, B_n;$$

такъ что событіе B_i, по существу дѣла, равносильно равенству

$$\alpha = \alpha_i.$$

Тогда искомыми величинами будутъ

$$(B_1, A), (B_2, A), \ldots, (B_n, A)$$

вѣроятности событій

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

при существованіи A.

Чтобы воспользоваться для опредѣленія этихъ вѣроятностей формулою

$$(B_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)},$$

надо найти только значенія

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n),$$

такъ какъ числа

$$(B_1) = p_1, (B_2) = p_2, \ldots, (B_n) = p_n$$

даны.

Обращаясь къ вычисленію

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n),$$

замѣчаемъ, что

$$(A, B_i)$$

представляетъ вѣроятность появленія событія E ровно k разъ

при $k+l$ независимыхъ испытаніяхъ, для каждаго изъ которыхъ вѣроятность событія E равна α_i.

Подобная вѣроятность находится по извѣстной формулѣ, въ силу которой имѣемъ

$$(A, B_i) = \frac{1.\ 2 \ldots (k+l)}{1.2 \ldots k.\ 1.\ 2 \ldots l} \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l.$$

Полагая i послѣдовательно равнымъ

$$1,\ 2, \ldots, n,$$

находимъ такимъ образомъ величины

$$(A, B_1),\ (A, B_2), \ldots, (A, B_n).$$

Остается только подставить эти величины въ указанную выше формулу и по сокращеніи на

$$\frac{1.\ 2 \ldots (k+l)}{1.\ 2 \ldots k.\ 1.\ 2 \ldots l}$$

получимъ

$$(B_i, A) = \frac{p_i \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l}{p_1 \alpha_1^k (1-\alpha_1)^l + p_2 \alpha_2^k (1-\alpha_2)^l + \ldots + p_n \alpha_n^k (1-\alpha_n)^l}.$$

Найдя вѣроятность каждаго значенія числа α въ отдѣльности, мы легко можемъ опредѣлить и вѣроятность, что α лежитъ въ заданныхъ предѣлахъ; такъ какъ послѣдняя вѣроятность равна суммѣ вѣроятностей тѣхъ значеній числа α, которыя лежатъ въ заданныхъ предѣлахъ.

Слѣдовательно, послѣ того, какъ стало извѣстнымъ, что при $k+l$ испытаніяхъ событіе E случилось ровно k разъ, вѣроятность неравенствъ

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

выражается дробью

$$\frac{\Sigma' p_i \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l}{\Sigma p_i \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l},$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ возможныя значенія i, сумма же Σ' только на тѣ, при которыхъ выполняются неравен-

ства

$$\alpha' < \alpha_i < \alpha''.$$

Задача 4

Задача $4^{ая}$. *При сохраненіи всѣхъ условій и данныхъ третьей задачи, требуется вычислить вѣроятность, что въ* $k_1 + l_1$ *будущихъ испытаній, изъ разсматриваемаго нами ряда, событіе* E *появится ровно* k_1 *разъ, когда извѣстно, что въ* $k + l$ *испытаній оно появилось ровно* k *разъ.*

Примѣчаніе. Мы назвали $k_1 + l_1$ испытаній будущими для отличія ихъ отъ наблюденныхъ; но въ нашихъ выводахъ время не играетъ никакой роли, и потому эти $k_1 + l_1$ испытаній могутъ быть также прошедшими или современными.

Рѣшеніе. Если буквою C обозначить появленіе событія E ровно k_1 разъ при k_1+l_1 испытаніяхъ, то искомая нами вѣроятность, согласно принятымъ обозначеніямъ, будетъ

$$(C, A)$$

и опредѣлится по формулѣ

$$(C, A) = \frac{\Sigma (B_i)\,(A, B_i)\,(C, B_i)}{\Sigma (B_i)\,(A, B_i)},$$

при

$$i = 1,\ 2, \ldots, n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$(B_i) = p_i,\ (A, B_i) = \frac{1.\ 2 \ldots (k+l)}{1.\ 2 \ldots k.\ 1.\ 2 \ldots l}\,\alpha_i^k\,(1-\alpha_i)^l$$

и наконецъ

$$(C, B_i) = \frac{1.\ 2 \ldots (k_1+l_1)}{1.\ 2 \ldots k_1.\ 1.\ 2 \ldots l_1}\,\alpha_i^{k_1}(1-\alpha_i)^{l_1};$$

ибо (C, B_i) отличается отъ (A, B_i) только числами k_1 и l_1, замѣняющими соотвѣтственно k и l.

Подставляя эти выраженія

$$(B_i),\ (A, B_i)\ \text{ и }\ (C, B_i)$$

въ приведенную выше формулу, по сокращеніи на

$$\frac{1.\ 2 \ldots (k+l)}{1.\ 2 \ldots k.\ 1.\ 2 \ldots l}$$

получаемъ

$$(C, A) = \frac{1.\ 2 \ldots (k_1+l_1)}{1.\ 2 \ldots k_1.\ 1.\ 2 \ldots l_1} \frac{\Sigma p_i \alpha_i^{k+k_1} (1-\alpha_i)^{l+l_1}}{\Sigma p_i \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l};$$

такъ опредѣляется вѣроятность

$$(C, A)$$

событію E появиться въ k_1+l_1 испытаній ровно k_1 разъ, когда извѣстно, что въ $k+l$ испытаній это событіе появилось ровно k разъ.

Для лучшаго выясненія послѣднихъ двухъ задачъ можетъ служить слѣдующій частный ихъ случай.

Имѣемъ n категорій сосудовъ съ бѣлыми и иными шарами.

Отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ шаровъ, находящихся въ сосудѣ, равно α_1 для каждаго сосуда первой категоріи, равно α_2 для каждаго сосуда второй категоріи и т. д.

Пусть наконецъ числа

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

представляютъ соотвѣтственно отношенія числа сосудовъ категорій

$$1^{ой}, 2^{ой}, \ldots, n^{ой}$$

къ числу всѣхъ сосудовъ.

Всѣ эти сосуды перемѣшаны и изъ нихъ взятъ на удачу одинъ, съ которымъ и производится рядъ испытаній.

Каждое испытаніе состоитъ въ извлеченіи одного шара, который затѣмъ возвращается обратно въ сосудъ для поддержанія постояннаго отношенія числа бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ шаровъ сосуда.

При $k+l$ такихъ испытаній бѣлый шаръ появился ровно k разъ.

Требуется опредѣлить вѣроятность, что для испытуемаго сосуда отношеніе числа содержащихся въ немъ бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ его шаровъ имѣетъ данное значеніе α_i.

До наблюденія эта вѣроятность равна p_i; послѣ же наблюденія она выражается, согласно формулѣ, дробью

$$\frac{p_i \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l}{p_1 \alpha_1^k (1-\alpha_1)^l + p_2 \alpha_2^k (1-\alpha_2)^l + \ldots + p_n \alpha_n^k (1-\alpha_n)^l}.$$

Затѣмъ требуется опредѣлить вѣроятность, что при $k_1 + l_1$ испытаніяхъ, произведенныхъ съ тѣмъ же сосудомъ послѣ наблюденныхъ $k + l$ испытаній, бѣлый шаръ появится ровно k_1 разъ.

Если бы результатъ наблюденныхъ $k+l$ испытаній не былъ извѣстенъ, то эта послѣдняя вѣроятность выражалась бы суммою

$$\sum \frac{1.\ 2 \ldots (k_1 + l_1)}{1.\ 2 \ldots k_1.\ 1.\ 2 \ldots l_1} p_i \alpha_i^{k_1} (1-\alpha_i)^{l_1},$$

гдѣ

$$i = 1,\ 2, \ldots n;$$

при извѣстности же результата $k + l$ испытаній она, согласно формулѣ, равна

$$\frac{1.\ 2 \ldots (k_1 + l_1)}{1.\ 2 \ldots k_1.\ 1.\ 2 \ldots l_1} \frac{\Sigma p_i \alpha_i^{k+k_1} (1-\alpha_i)^{l+l_1}}{\Sigma p_i \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l},$$

гдѣ

$$i = 1,\ 2, \ldots n.$$

Переходя къ упомянутому выше предѣльному случаю, положимъ

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{n},\ \alpha_2 = \frac{2}{n}, \ldots, \alpha_i = \frac{i}{n}, \ldots, \alpha_n = 1$$

и будемъ увеличивать n безпредѣльно.

Тогда разсматриваемыя нами суммы

$$\Sigma p_i \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l,\ \Sigma p_i \alpha_i^k (1-\alpha_i)^l,$$

$$\Sigma p_i \alpha_i^{k+k_1} (1-\alpha_i)^{l+l_1}$$



будутъ стремится, какъ нетрудно видѣть, къ предѣламъ

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} \alpha^k (1-\alpha)^l \, d\alpha, \quad \int_0^1 \alpha^k (1-\alpha)^l \, d\alpha,$$

$$\int_0^1 \alpha^{k+k_1} (1-\alpha)^{l+l_1} \, d\alpha.$$

Выводы, къ которымъ мы приходимъ такимъ образомъ, заключаются въ рѣшеніи задачъ 5ой и 6ой.

Задача 5ая. Разсматривается неограниченный рядъ испытаній, относительно которыхъ извѣстно, что по выясненіи нѣкоторыхъ обстоятельствъ они становятся независимыми другъ отъ друга.

Далѣе предполагается извѣстнымъ, что вѣроятность событія E при всѣхъ этихъ испытаніяхъ должна имѣть одну и ту же величину α, если только будутъ выяснены вышеупомянутыя обстоятельства.

Но эти обстоятельства остаются невыясненными и потому число α остается неизвѣстнымъ и всѣ возможныя для него значенія, между 0 и 1, представляются равновозможными; такъ что вѣроятность неравенствъ

$$\alpha' < \alpha < \alpha'',$$

при $0 < \alpha' < \alpha'' < 1$, *выражается интеграломъ*

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha = \alpha'' - \alpha'.$$

Спрашивается, какъ измѣнятся вѣроятности различныхъ предположеній о величинѣ α въ томъ случаѣ, когда будетъ извѣстно, что при $k+l$ испытаніяхъ событіе E появилось k разъ, а противоположное ему l разъ?

Отвѣтъ. Вѣроятность неравенствъ

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

будетъ выражаться дробью

$$\frac{\int_{\alpha'}^{\alpha''} \alpha^k (1-\alpha)^l \, d\alpha}{\int_0^1 \alpha^k (1-\alpha)^l \, d\alpha} \qquad (20);$$

иначе сказать, плотность вѣроятности для различныхъ значеній α будетъ пропорціональна произведенію

$$\alpha^k (1-\alpha)^l.$$

Задача 6[ая]. ***При сохраненіи всѣхъ условій и данныхъ предъидущей задачи, требуется найти вѣроятность, что въ $k_1 + l_1$ будущихъ испытаній, изъ разсматриваемаго нами ряда, событіе E появится ровно k_1 разъ, когда извѣстно, что въ $k + l$ испытаній оно появилось ровно k разъ.***

Отвѣтъ.

Искомая вѣроятность равна

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots (k_1 + l_1)}{1.\ 2 \ldots k_1 .\ 1.\ 2 \ldots l_1} \cdot \frac{\int_0^1 \alpha^{k+k_1} (1-\alpha)^{l+l_1} \, d\alpha}{\int_0^1 \alpha^k (1-\alpha)^l \, d\alpha} \qquad (21).$$

Послѣднія двѣ задачи отлично иллюстрируются посредствомъ неисчерпаемаго сосуда, въ которомъ находятся шары бѣлаго и иного цвѣта, при чемъ отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ шаровъ сохраняетъ неизвѣстную намъ постоянную величину, сколько бы шаровъ мы ни вынули изъ сосуда.

Формулы, представляющія отвѣтъ на задачи 5[ую] и 6[ую], примѣняются къ опредѣленію вѣроятностей по наблюденіямъ, à posteriori.

При этомъ, изъ выраженія вѣроятности неравенствъ

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

въ видѣ отношенія

$$\frac{\int_{\alpha'}^{\alpha''} \alpha^k (1-\alpha)^l \, d\alpha}{\int_0^1 \alpha^k (1-\alpha)^l \, d\alpha}$$

можно заключить о малой вѣроятности большихъ отклоненій α отъ $\frac{k}{k+l}$, если число наблюденныхъ испытаній $k+l$ значительно; и потому можно положить

$$\alpha \doteq \frac{k}{k+l}.$$

Затѣмъ изъ отвѣта на шестую задачу можно вывесть, что при большомъ числѣ наблюденныхъ испытаній и сравнительно маломъ числѣ будущихъ испытаній вѣроятности различныхъ предположеній о числѣ появленій событія E, при этихъ послѣднихъ испытаніяхъ, мало отличаются отъ тѣхъ, которыя получатся, если при всѣхъ будущихъ испытаніяхъ мы будемъ считать вѣроятность событія E равною

$$\frac{k}{k+l}.$$

Напримѣръ, для одного будущаго испытанія вѣроятность появленія событія E равна

$$\frac{k+1}{k+l+2} \doteq \frac{k}{k+l};$$

а для двухъ будущихъ испытаній вѣроятность появленія событія E два раза равна

$$\frac{(k+1)(k+2)}{(k+l+2)(k+l+3)} \doteq \left(\frac{k}{k+l}\right)^2$$

и вѣроятность появленія его только одинъ разъ равна

$$2\frac{(k+1)(l+1)}{(k+l+2)(k+l+3)} \doteq 2\frac{k}{k+l}\cdot\frac{l}{k+l}.$$

Указанному примѣненію формулъ, рѣшающихъ задачи 5^{ую} и 6^{ую}, нельзя придавать большого значенія, въ виду чего мы не считаемъ нужнымъ останавливаться на полномъ выясненіи правильности только что сдѣланныхъ выводовъ изъ этихъ формулъ.

Дѣло въ томъ, что прежде, чѣмъ примѣнять ту или другую формулу и дѣлать изъ нея различные выводы, необходимо выяснить условія ея существованія и убѣдиться въ выполненіи ихъ въ тѣхъ случаяхъ, къ которымъ мы желаемъ примѣнять формулу.

Формулы, представляющія отвѣтъ на задачи $5^{ую}$ и $6^{ую}$, обставлены слѣдующими условіями:

1) независимость испытаній, по выясненіи нѣкоторыхъ обстоятельствъ;

2) постоянство неизвѣстной намъ вѣроятности событія E по выясненіи выше упомянутыхъ обстоятельствъ;

3) равновозможность всѣхъ значеній этой вѣроятности, до наблюденія.

Примѣняются же эти формулы въ такихъ случаяхъ, гдѣ крайне сомнительно выполненіе хотя бы одного изъ вышеупомянутыхъ трехъ условій.

Одинъ изъ важныхъ примѣровъ вѣроятностей, опредѣляемыхъ по наблюденіямъ, представляетъ вѣроятность лицу даннаго возраста прожить данный срокъ, напримѣръ одинъ годъ.

Объ этой вѣроятности говорятъ очень часто въ виду важныхъ ея приложеній.

Многіе занимались разработкою пріемовъ приближеннаго вычисленія ея на основаніи наблюденій и составили различныя таблицы смертности, изъ которыхъ нетрудно вывесть ея приближенную величину для различныхъ возрастовъ и сроковъ.

Мы не станемъ разбирать подробностей и тонкостей этихъ пріемовъ, а остановимся только на выясненіи ихъ основаній.

Положимъ, что n лицъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же данный возрастъ, поступили подъ наше наблюденіе и что мы не теряли ихъ изъ виду въ теченіе даннаго срока.

Положимъ далѣе, что m изъ нихъ прожили данный срокъ, а $n - m$ умерли въ теченіе его.

Тогда, разсматривая безразлично одно изъ этихъ лицъ, мы можемъ дробь

$$\frac{m}{n}$$

назвать вѣроятностью прожить данный срокъ лицу даннаго возраста, взятому изъ числа вышеуказанныхъ n лицъ.

Установленная такимъ образомъ вѣроятность относится



только къ прошедшему времени и къ данной группѣ лицъ; но практическія цѣли заставляютъ насъ переносить выводы прошлаго на будущее.

Этотъ переносъ оправдывается предположеніемъ, что для другой группы людей, болѣе или менѣе похожей на прежнюю, отношеніе аналогичное дроби $\frac{m}{n}$ будетъ мало отличаться отъ $\frac{m}{n}$.

Послѣднее же предположеніе основывается на замѣченномъ съ давнихъ временъ повтореніи различныхъ явленій, изъ котораго вытекаетъ представленіе о неизмѣнныхъ законахъ природы.

Примѣняя затѣмъ къ данному случаю задачи 5^{ую} и 6^{ую}, мы должны вообразить себѣ существованіе какой то неизвѣстной величины

$$\alpha,$$

которая представляетъ вѣроятность лицу даннаго возраста прожить данный срокъ и приближенно равна

$$\frac{m}{n}.$$

Но, при всей вѣрѣ въ существованіе неизмѣнныхъ законовъ природы, мы имѣемъ полное основаніе отрицать существованіе постояннаго числа α; такъ какъ съ теченіемъ времени условія жизни людей могутъ измѣняться весьма значительно, а при измѣненіи условій жизни едва ли можетъ оставаться неизмѣнною смертность людей.

Сверхъ того весьма естественно предположеніе о различной смертности различныхъ категорій людей, одновременно обитающихъ на землѣ, но отличающихся другъ отъ друга мѣстомъ жительства, родомъ занятій, тѣлосложеніемъ и т. д.

Поэтому, если допустить, что постоянное число α опредѣляется общими условіями жизни всѣхъ людей; то опредѣленіе такого числа по наблюденіямъ надъ одной группой лицъ трудно признать правильнымъ, какими бы формулами ни подкрѣплялось это опредѣленіе; такъ какъ должны проявиться индивидуальныя особенности группы.

Указанное обстоятельство не устранится и въ томъ случаѣ, если мы будемъ разсматривать не совокупность всѣхъ людей вообще, а нѣкоторую часть ея, при чемъ встрѣтится еще новое затрудненіе, состоящее въ необходимости точно опредѣлить разсматриваемую часть.

Итакъ, признавая пользу таблицъ смертности для практическихъ цѣлей, мы считаемъ невозможнымъ доказывать законность ихъ примѣненій ссылками на формулы исчисленія вѣроятностей.

§ 33. Въ заключеніе главы остановимся на вопросѣ о вѣроятности свидѣтельскихъ показаній, къ которому также можно приложить формулу Байеса.

Съ практической точки зрѣнія этотъ вопросъ можетъ представляться весьма важнымъ; но значеніе его рѣшенія сильно уменьшается необходимостью многихъ произвольныхъ предположеній.

Мы не будемъ долго останавливаться на этомъ вопросѣ, но находимъ невозможнымъ умолчать о немъ совершенно.

Для упрощенія вопроса мы будемъ считать всѣхъ свидѣтелей вполнѣ освѣдомленными о предметѣ ихъ показанія, но способными сообщать завѣдомо ложныя свѣдѣнія; а показанія ихъ будемъ считать независимыми другъ отъ друга и согласными.

Всѣмъ свидѣтелямъ мы припишемъ одинаковую склонность къ правдѣ и будемъ измѣрять ее какимъ нибудь числомъ α, лежащимъ между нулемъ и единицей; число α мы будемъ разсматривать какъ вѣроятность, что свидѣтель говоритъ правду, и соотвѣтственно этому разность $1 - \alpha$ будетъ представлять вѣроятность, что свидѣтель говоритъ неправду.

Число свидѣтелей обозначимъ буквою n.

Положимъ, что согласныя ихъ показанія относятся къ извѣстному всѣмъ имъ результату испытанія; пусть, именно, всѣ n свидѣтелей заявляютъ, что при испытаніи появилось событіе E, вѣроятность котораго до свидѣтельскихъ показаній равна p.

Наконецъ мы введемъ еще величину β, которая будетъ вы-

ражать вѣроятность для свидѣтеля, говорящаго неправду, остановиться именно на событіи E, а не на какомъ нибудь другомъ возможномъ результатѣ того же испытанія.

При такихъ условіяхъ мы выразимъ произведеніемъ

$$p\alpha^n$$

вѣроятность появленія событія E и согласнаго заявленія свидѣтелей объ этомъ появленіи, пока свидѣтели не высказались; при тѣхъ же условіяхъ вѣроятность непоявленія событія E и согласнаго заявленія свидѣтелей о его появленіи мы представимъ произведеніемъ

$$(1-p)(1-\alpha)^n\beta^n.$$

Соотвѣтственно этому сумма

$$p\alpha^n+(1-p)(1-\alpha)^n\beta^n$$

будетъ выражать вѣроятность согласнаго заявленія свидѣтелей о появленіи событія E, пока свидѣтели не высказались.

Отсюда, на основаніи формулы Байеса, мы заключаемъ, что послѣ согласнаго показанія свидѣтелей вѣроятность появленія событія E становится равною

$$\frac{p\alpha^n}{p\alpha^n+(1-p)(1-\alpha)^n\beta^n} \qquad (22).$$

Замѣтимъ, что при $\beta<1$ и $\alpha>0$ указанная нами вѣроятность стремится къ предѣлу 1 при безпредѣльномъ возрастаніи числа согласныхъ свидѣтелей; такъ какъ вѣроятность полнаго согласія ложныхъ показаній, выражаемая степенью β^n, стремится къ предѣлу нуль, когда число свидѣтелей увеличивается безпредѣльно.

Найденное простое выраженіе вѣроятности мы примѣнимъ къ одной интересной задачѣ, которую поставилъ Буняковскій въ своемъ извѣстномъ сочиненіи «Основанія математической теоріи вѣроятностей» и которую онъ рѣшилъ не совсѣмъ правильно.

Задача Буняковскаго.

Изъ полной русской азбуки выдернули шесть буквъ на удачу, которыя по мѣрѣ ихъ вскрытія ставили одну возлѣ другой.

Два очевидца утверждаютъ, что вынутыя буквы составили слово *Москва.*

Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что показаніе двухъ свидѣтелей справедливо?

При этомъ предполагается, что полная русская азбука содержитъ 36 буквъ и что склонность свидѣтелей къ правдѣ выражается дробью $\frac{9}{10}$.

Рѣшеніе. Обращаясь къ общему выраженію вѣроятности въ видѣ дроби

$$\frac{p\alpha^n}{p\alpha^n + (1-p)(1-\alpha)^n \beta^n},$$

замѣчаемъ, что въ данномъ случаѣ

$$n = 2, \quad \alpha = \frac{9}{10}$$

и на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей

$$p = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{33} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31};$$

число же β остается неопредѣленнымъ.

Для устраненія неопредѣленности числа β обратимся къ предположенію, которое сдѣлано Буняковскимъ при рѣшеніи задачи.

Оно заключается въ томъ, что въ русскомъ языкѣ имѣется 50000 словъ, состоящихъ изъ шести различныхъ буквъ, и что при ложномъ показаніи свидѣтель долженъ остановиться на одномъ изъ этихъ словъ.

Считая всѣ эти ложныя показанія равновозможными и, въ виду малости разности

$$\frac{1}{50000} - \frac{1}{49999},$$

не обращая вниманія на уменьшеніе числа ихъ на одну единицу въ случаѣ, когда вынутыя буквы составили одно изъ словъ, мы



положимъ

$$\beta = \frac{1}{50000}.$$

При такихъ предположеніяхъ искомая вѣроятность выразится дробью

$$\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{36.\ 35.\ 34.\ 33.\ 32.\ 31 - 1}{(50000)^2}},$$

которая послѣ простыхъ сокращеній приводится къ

$$\frac{81 \times (625)^2}{81 \times (625)^2 + 219126{,}5\ldots} > 0{,}99;$$

а по вычисленіямъ Буняковскаго искомая вѣроятность близка къ

$$\frac{81}{28129}.$$

Разногласіе двухъ выводовъ, полученныхъ при однихъ и тѣхъ же предположеніяхъ, объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что Буняковскій свелъ единогласное показаніе свидѣтелей о появленіи опредѣленнаго слова *Москва* къ простому указанію каждаго изъ свидѣтелей на появленіе одного изъ словъ русскаго языка и соотвѣтственно этому выразилъ искомую вѣроятность дробью

$$\frac{p\alpha^2}{p\alpha^2 + (1-p)(1-\alpha)^2},$$

полагая

$$\alpha = \frac{9}{10} \quad \text{и} \quad p = \frac{50000}{36.\ 35.\ 34.\ 33.\ 32.\ 31}.$$

Принятая нами величина β едва ли не должна быть признана слишкомъ малою; ибо число русскихъ словъ, составленныхъ изъ шести различныхъ буквъ, конечно значительно меньше 50000, и кромѣ того естественно предполагать, что слово *Москва* можетъ быть выбрано для ложнаго показанія предпочтительно передъ многими другими.

Увеличивая въ виду этого обстоятельства число β, положимъ

$$\beta = \frac{1}{200};$$

тогда искомая нами вѣроятность, что показаніе двухъ свидѣтелей справедливо, выразится уже довольно малымъ числомъ

$$\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^2\frac{36.35\;34.33.32.31-1}{(200)^2}}=\frac{81}{35141}$$

Приведенный примѣръ, по нашему мнѣнію, достаточно выясняетъ неизбѣжность многихъ произвольныхъ предположеній при рѣшеніи вопросовъ подобныхъ разобранному нами, которые по существу дѣла имѣютъ весьма неопредѣленный характеръ.

Разсмотрѣнный вопросъ приметъ еще болѣе неопредѣленный характеръ, если допустимъ, что свидѣтели могутъ ошибаться и устранимъ независимость ихъ показаній.

Для избѣжанія возможности неправильныхъ примѣненій формулы (22) добавимъ къ вышесказанному рядъ простыхъ замѣчаній.

Во первыхъ, если событіе невозможно, то никакія свидѣтельскія показанія не могутъ сообщить ему даже малой вѣроятности.

Мало вѣроятное событіе можетъ отъ согласныхъ показаній многихъ свидѣтелей превратиться въ весьма вѣроятное, если совпаденіе ложныхъ показаній представляется еще менѣе вѣроятнымъ.

Но мало вѣроятное событіе не станетъ весьма вѣроятнымъ отъ согласнаго показанія такихъ свидѣтелей, которые сговорились другъ съ другомъ, или имѣютъ одинаковыя не вполнѣ точныя свѣдѣнія о предметѣ ихъ показаній.

Какъ бы ни былъ добросовѣстенъ очевидецъ событія, но сомнѣніе въ томъ, что онъ способенъ былъ правильно понять совершившееся, можетъ, въ извѣстныхъ случаяхъ, лишить его показаніе всякаго значенія.

Наконецъ сообщеніе о событіи можетъ доходить къ намъ не отъ очевидцевъ а черезъ послѣдовательный рядъ свидѣтелей, которые передаютъ то, что они слышали отъ другихъ.

Въ этомъ случаѣ удлинненіе цѣпи свидѣтелей, конечно, затемняетъ совершившееся.

ГЛАВА VII.

Способъ наименьшихъ квадратовъ.

§ 34. Способомъ наименьшихъ квадратовъ называется общеупотребительный пріемъ полученія приближенныхъ результатовъ изъ многихъ наблюденій, съ оцѣнкою достоинства этихъ результатовъ.

Чтобы обосновать его на соображеніяхъ, относящихся къ исчисленію вѣроятностей, мы должны установить рядъ предположеній и условій; и прежде всего необходимо допустить существованіе чиселъ, приближенныя величины которыхъ доставляются наблюденіями.

Каждое наблюденіе, дающее то или другое число, мы будемъ разсматривать какъ частный случай многихъ наблюденій; и соотвѣтственно этому мы будемъ разсматривать, рядомъ съ дѣйствительнымъ результатомъ наблюденія, воображаемый нами возможный результатъ наблюденія.

Считая данное наблюденіе частнымъ случаемъ многихъ наблюденій, мы будемъ предполагать, что условія наблюденія дѣлятся на двѣ категоріи: условія постоянныя, сохраняющіяся безъ измѣненія при всѣхъ вышеупомянутыхъ наблюденіяхъ, частнымъ случаемъ которыхъ является данное, и условія пере-

мѣнныя, или случайныя, мѣняющіяся отъ одного наблюденія до другого.

Вмѣстѣ съ тѣмъ допустимъ, что каждому опредѣленному предположенію о величинѣ возможнаго результата наблюденія будетъ соотвѣтствовать опредѣленная вѣроятность въ томъ случаѣ, когда постоянныя условія наблюденія, намъ неизвѣстныя, станутъ извѣстными.

Пусть a означаетъ неизвѣстное число, приближенную величину котораго x' мы получаемъ изъ наблюденія; пусть далѣе x означаетъ возможный результатъ наблюденія и различными значеніями числа x будутъ

$$x',\ x'',\ x''',\ldots,$$

пусть наконецъ

$$q',\ q'',\ q''',\ldots.$$

соотвѣтственно означаютъ вѣроятности этихъ значеній x, когда постоянныя условія наблюденія извѣстны.

Изъ всѣхъ упомянутыхъ здѣсь чиселъ намъ извѣстно только одно x'.

Неизвѣстная величина разности

$$a-x'$$

представляетъ дѣйствительную погрѣшность, или ошибку, наблюденія; разность же

$$a-x$$

мы будемъ называть возможною погрѣшностью наблюденія, а математическое ожиданіе ея

$$q'(a-x')+q''(a-x'')+q'''(a-x''')+\ldots,$$

равное

$$a-(q'x'+q''x''+q'''x'''+\ldots),$$

назовемъ *постоянною погрѣшностью.*

Величина постоянной погрѣшности намъ, конечно, неизвѣстна; однако въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ считать



ее равною нулю. Соотвѣтственно этому мы будемъ говорить, что въ приближенномъ равенствѣ

$$a \doteq x'$$

нѣтъ постоянной погрѣшности.

Заключеніе объ отсутствіи постоянной погрѣшности часто выводятъ изъ предположенія, что каждыя двѣ величины возможной погрѣшности, дающія въ суммѣ нуль, равновѣроятны; но въ послѣднемъ предположеніи нѣтъ надобности для предстоящихъ разсужденій.

Предположеніе объ отсутствіи постоянной погрѣшности, какъ и приведенное сейчасъ предположеніе, не только произвольно но даже находится въ нѣкоторомъ противорѣчіи съ тѣмъ фактомъ, что различныя причины постоянныхъ погрѣшностей открываются постепенно.

Однако въ теоретическихъ разсужденіяхъ мы принимаемъ это предположеніе, какъ необходимое.

Если бы съ числомъ a не было связано болѣе или менѣе опредѣленнаго представленія; то предположеніе объ отсутствіи постоянной погрѣшности мы могли бы сдѣлать несомнѣннымъ, опредѣляя число a равенствомъ

$$a = q' x' + q'' x'' + q''' x''' + \ldots.$$

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ намъ понадобится также математическое ожиданіе квадрата возможной погрѣшности, равное суммѣ

$$q' (x' - a)^2 + q'' (x'' - a)^2 + q''' (x''' - a)^2 + \ldots;$$

корень квадратный изъ этой, неизвѣстной намъ, суммы называется *средней квадратичной ошибкой* наблюденія, или приближеннаго равенства

$$a \doteq x'.$$

Разсматривая результаты различныхъ наблюденій, мы будемъ предполагать извѣстными отношенія математическихъ ожиданій квадратовъ ихъ погрѣшностей, другъ къ другу.

Соотвѣтственно этому, вводя для нѣсколькихъ наблюденій одно и то же неизвѣстное число k, мы будемъ математическое ожиданіе квадрата возможной погрѣшности даннаго наблюденія представлять въ видѣ дроби

$$\frac{k}{P}$$

съ опредѣленнымъ знаменателемъ P, который мы будемъ называть вѣсомъ наблюденія или вѣсомъ соотвѣтствующаго равенства

$$a \doteqdot x'.$$

Вѣса наблюденій устанавливаются на разныхъ соображеніяхъ, болѣе или менѣе произвольно.

На первомъ планѣ приведемъ простѣйшее изъ нихъ.

Именно, если всѣ извѣстныя условія какихъ нибудь наблюденій, дающихъ приближенныя значенія одного и того же числа a, одинаковы; то обыкновенно предполагаютъ, что вѣса этихъ наблюденій одинаковы.

Кромѣ приближенныхъ равенствъ, доставляемыхъ непосредственно наблюденіями, мы будемъ разсматривать и другія приближенныя равенства, которыя будемъ выводить изъ совокупности многихъ наблюденій.

Пусть

$$U' \doteqdot 0$$

означаетъ одно изъ такихъ равенствъ.

Выраженіе U' составлено опредѣленнымъ образомъ изъ искомыхъ чиселъ, подобныхъ числу a, и изъ чиселъ, доставленныхъ наблюденіями.

Замѣняя числа, доставленныя наблюденіями, воображаемыми возможными результатами наблюденій, получаемъ вмѣсто U' новое выраженіе U, которое назовемъ возможною погрѣшностью приближеннаго равенства

$$U' \doteqdot 0.$$

А математическое ожиданіе U назовемъ постоянною погрѣш-

ностью приближеннаго равенства

$$U' \doteq 0.$$

Мы будемъ разсматривать только такія приближенныя равенства установленнаго вида, о которыхъ на основаніи нашихъ данныхъ и предположеній можно утверждать, что ихъ постоянныя погрѣшности равны нулю.

Затѣмъ какъ для равенствъ, доставляемыхъ непосредственно наблюденіями, такъ и для выводныхъ равенствъ мы будемъ оцѣнивать ихъ достоинство вѣсомъ, представляя математическое ожиданіе квадрата возможной погрѣшности въ видѣ дроби

$$\frac{k}{P},$$

гдѣ по прежнему k означаетъ число неизвѣстное, а P вѣсъ соотвѣтствующаго приближеннаго равенства.

Если наблюденія даютъ возможность для какого нибудь неизвѣстнаго числа a составить нѣсколько приближенныхъ равенствъ вида

$$a - X' \doteq 0,$$

гдѣ X' означаетъ число вполнѣ опредѣляемое результатами наблюденій; то мы будемъ выбирать изъ этихъ равенствъ, какъ наилучшее для опредѣленія числа a, равенство, вѣсъ котораго наибольшій.

§ 35. *Случай одного неизвѣстнаго.*

Пусть для опредѣленія неизвѣстнаго числа a произведено n наблюденій, которыя дали для a приближенныя значенія

$$a', a'', \ldots, a^{(n)}.$$

Согласно приведеннымъ выше объясненіямъ рядомъ съ дѣйствительно полученными числами

$$a', a'', \ldots, a^{(n)}$$

мы будемъ разсматривать возможные результаты наблюденій,

которыя пусть будутъ

$$u', \ u'', \dots, \ u^{(n)};$$

такъ что u' представляетъ возможный результатъ перваго наблюденія, давшаго число a', u'' возможный результатъ втораго наблюденія и т. д.

Наши наблюденія мы предполагаемъ свободными отъ постоянной погрѣшности и *независимыми другъ отъ друга*, придавая послѣднему условію тотъ смыслъ, что величины

$$u', \ u'' \dots, \ u^{(n)}$$

не зависятъ другъ отъ друга.

Разсматриваемыя нами наблюденія даютъ для опредѣленія числа a рядъ приближенныхъ равенствъ

$$a \doteqdot a', \ a \doteqdot a'', \dots, \ a \doteqdot a^{(n)},$$

которыя согласно нашимъ допущеніямъ и опредѣленіямъ не содержатъ постоянной погрѣшности.

Этимъ равенствамъ мы приписываемъ опредѣленные вѣса

$$p', \ p'', \dots, \ p^{(n)},$$

полагая

$$\text{м. о. } (a - u')^2 = \frac{k}{p'},$$

$$\text{м. о. } (a - u'')^2 = \frac{k}{p''},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{м. о. } (a - u^{(n)})^2 = \frac{k}{p^{(n)}}.$$

Пользуясь затѣмъ результатами всѣхъ наблюденій составимъ изъ приведенныхъ выше *n* приближенныхъ равенствъ слѣдующее

$$a \doteqdot \lambda' a' + \lambda'' a'' + \dots + \lambda^{(n)} a^{(n)},$$

гдѣ выборъ коэффиціентовъ

$$\lambda', \ \lambda'', \dots, \ \lambda^{(n)}$$

находится въ нашемъ распоряженіи.

Мы подчинимъ коэффиціенты

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

двумъ условіямъ, согласно ранѣе высказаннымъ положеніямъ.

Во первыхъ мы потребуемъ, чтобы приближенное равенство

$$a \doteqdot \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

было свободно отъ постоянной погрѣшности.

Это условіе, очевидно, выражается равенствомъ

$$\lambda' + \lambda'' + \ldots + \lambda^{(n)} = 1,$$

такъ какъ математическое ожиданіе суммы

$$\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)},$$

при любой опредѣленной системѣ чиселъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

равно

$$(\lambda' + \lambda'' + \ldots + \lambda^{(n)})\, a.$$

Во вторыхъ мы потребуемъ, чтобы вѣсъ приближеннаго равенства

$$a \doteqdot \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

былъ наибольшимъ.

Это требованіе вызывается тѣмъ обстоятельствомъ, что достоинство каждаго приближеннаго равенства мы оцѣниваемъ его вѣсомъ, какъ было выше установлено.

Такимъ образомъ, установивъ рядъ предположеній и условій, мы превращаемъ въ опредѣленную математическую задачу вопросъ, лишенный математическаго смысла, о томъ, какъ по возможности лучше воспользоваться результатами многихъ наблюденій.

Примѣчаніе. Мы ограничились равенствами вида

$$a \doteqdot \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

не только ради ихъ особой простоты но и по той причинѣ, что ни о какомъ другомъ равенствѣ нельзя, на основаніи нашихъ условій, утверждать, чтобы оно доставляло приближенную величину a безъ постоянной погрѣшности.

Напримѣръ, если бы мы положили

$$a \mp \sqrt[n]{a' a'' \dots a^{(n)}},$$

или

$$a \mp \sqrt{\frac{a' a' + a'' a'' + \dots + a^{(n)} a^{(n)}}{n}};$$

то возможность постоянной погрѣшности не была бы устранена.

Для опредѣленія вѣса приближеннаго равенства

$$a \mp \lambda' a' + \lambda'' a'' + \dots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

составляемъ математическое ожиданіе квадрата разности

$$a - (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \dots + \lambda^{(n)} u^{(n)}).$$

Въ силу условія

$$\lambda' + \lambda'' + \dots + \lambda^{(n)} = 1$$

этотъ квадратъ равенъ

$$\{\lambda'(u' - a) + \lambda''(u'' - a) + \dots + \lambda^{(n)}(u^{(n)} - a)\}^2 =$$

$$= \lambda'\lambda'(u' - a)^2 + \lambda''\lambda''(u'' - a)^2 + \dots + \lambda^{(n)}\lambda^{(n)}(u^{(n)} - a)^2$$

$$+ 2\lambda'\lambda''(u' - a)(u'' - a) + \dots$$

и математическое ожиданіе его приводится къ

$$k\left[\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \dots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right];$$

ибо математическія ожиданія квадратовъ

$$(u' - a)^2,\ (u'' - a)^2, \dots,\ (u^{(n)} - a)^2,$$

по предположенію, равны

$$\frac{k}{p'},\quad \frac{k}{p''}, \dots,\ \frac{k}{p^{(n)}},$$

а математическія ожиданія произведеній

$$(u'-a)\,(u''-a),\ldots,\ (u''-a)\,(u^{(n)}-a),\ldots,$$

различныхъ множителей, приводятся къ нулю, въ силу независимости величинъ u', u'',...., $u^{(n)}$.

Представляя величину

$$k\left[\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right]$$

въ видѣ дроби

$$\frac{k}{P},$$

заключаемъ, что вѣсъ P разсматриваемаго нами приближеннаго равенства

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots\ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

опредѣляется формулою

$$P=\frac{1}{\frac{\lambda'\lambda'}{p}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}}.$$

И слѣдовательно этотъ вѣсъ достигнетъ своей наибольшей величины въ томъ случаѣ когда сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигнетъ своей наименьшей величины, при соблюденіи, конечно, условія

$$\lambda'+\lambda''+\ldots\ldots+\lambda^{(n)}=1.$$

Съ другой стороны нетрудно установить слѣдующее тожество

$$(p'+p''+..+p^{(n)})\left\{\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+..+\frac{\lambda^{n}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right\}-(\lambda'+\lambda''+..+\lambda^{(n)})^2$$
$$=\Sigma p^{(i)}p^{(j)}\left\{\frac{\lambda^{(i)}}{p^{(i)}}-\frac{\lambda^{(j)}}{p^{(j)}}\right\}^2,$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n$$

а j означаетъ каждое изъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3, \ldots ,\ i-1.$$

Приведенное нами тожество показываетъ, что сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигаетъ своего наименьшаго значенія въ томъ случаѣ, когда всѣ разности

$$\frac{\lambda^{(i)}}{p^{(i)}}-\frac{\lambda^{(j)}}{p^{(j)}}$$

обращаются въ нуль.

Полагая соотвѣтственно этому

$$\frac{\lambda'}{p'}=\frac{\lambda''}{p''}=\ldots=\frac{\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}=\frac{\lambda'+\lambda''+\ldots+\lambda^{(n)}}{p'+p''+\ldots+p^{(n)}}$$

получаемъ для опредѣленія коэффиціентовъ

$$\lambda',\ \lambda'', \ldots ,\ \lambda^{(n)}$$

слѣдующую общую формулу

$$\lambda^{(i)}=\frac{p^{(i)}}{p'+p''+\ldots+p^{(n)}}.$$

При величинахъ $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$, которыя даетъ указанная нами формула, сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигаетъ своей наименьшей величины

$$\frac{1}{p'+p''+\ldots+p^{(n)}},$$

а вѣсъ приближеннаго равенства

$$a \doteqdot \lambda' a'+\lambda'' a''+\ldots+\lambda^{(n)} a^{(n)}$$

достигаетъ своей наибольшей величины

$$p'+p''+\ldots+p^{(n)}.$$

Въ виду изложенныхъ соображеній изъ различныхъ приближенныхъ равенствъ, которыя можно установить на основаніи вышеприведенныхъ результатовъ наблюденій, мы выбираемъ, какъ наилучшее для опредѣленія числа a, такое

$$a \doteq \frac{p' a' + p'' a'' + \ldots + p^{(n)} a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}} \qquad (23)$$

и замѣчаемъ, что его вѣсъ P равенъ суммѣ вѣсовъ первоначальныхъ равенствъ

$$a \doteq a', \quad a \doteq a'', \ldots, \quad a \doteq a^{(n)},$$

доставленныхъ непосредственно наблюденіями:

$$P = p' + p'' + \ldots + p^{(n)} \qquad (24).$$

Въ простѣйшемъ случаѣ, когда всѣмъ наблюденіямъ мы приписываемъ одинъ и тотъ же вѣсъ, приближенная величина a, опредѣляемая формулой (23), представляетъ среднюю ариѳметическую изъ величинъ, доставляемыхъ непосредственно наблюденіями; а вѣсъ приближеннаго равенства

$$a \doteq \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}$$

будетъ равенъ числу наблюденій, если за вѣсъ каждаго наблюденія мы примемъ единицу.

Положимъ теперь, что кромѣ n наблюденій, доставившихъ приближенныя равенства

$$a \doteq a', \; a \doteq a'', \ldots, \; a \doteq a^{(n)}$$

одинаковаго достоинства, произведено еще m наблюденій, доставившихъ приближенныя равенства

$$a \doteq a^{(n+1)}, \; a \doteq a^{(n+2)}, \ldots, \; a \doteq a^{(n+m)}$$

также одинаковаго достоинства но, быть можетъ, неравнаго достоинства съ прежними.

Приписывая приближеннымъ равенствамъ

$$a \mp a',\ a \mp a'', \ldots,\ a \mp a^{(n)}$$

одинаковое достоинство, мы приравняемъ математическія ожиданія квадратовъ ихъ погрѣшностей одному и тому же неизвѣстному числу k_1; а математическія ожиданія квадратовъ погрѣшностей равенствъ

$$a \mp a^{(n+1)},\ a \mp a^{(n+2)}, \ldots,\ a \mp a^{(n+m)}$$

приравняемъ другому неизвѣстному числу k_2.

Затѣмъ изъ совокупности равенствъ

$$a \mp a',\ a \mp a'', \ldots,\ a \mp a^{(n)}$$

мы можемъ вывести равенство

$$a \mp \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n},$$

для котораго математическое ожиданіе квадрата погрѣшности равно

$$\frac{k_1}{n};$$

а равенствами

$$a \mp a^{(n+1)},\ a \mp a^{(n+2)}, \ldots,\ a \mp a^{(n+m)}$$

можемъ воспользоваться для образованія другого приближеннаго равенства

$$a \mp \frac{a^{(n+1)} + a^{(n+2)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m},$$

математическое ожиданіе квадрата погрѣшности котораго равно

$$\frac{k_2}{m}.$$

Если же, съ цѣлью лучшаго опредѣленія числа a, мы пожелаемъ воспользоваться всѣми $n + m$ равенствами

$$a \mp a',\ a \mp a'', \ldots,\ a \mp a^{(n)},\ a \mp a^{(n+1)}, \ldots,\ a \mp a^{(n+m)};$$

то должны будемъ такъ или иначе установить величину отношенія $\frac{k_1}{k_2}$.

Начиная съ простѣйшаго предположенія, положимъ

$$k_1 = k_2.$$

Тогда совокупность всѣхъ $n+m$ равенствъ

$$a \doteqdot a', \quad a \doteqdot a'', \ldots, \quad a \doteqdot a^{(n+m)}$$

доставитъ намъ такое равенство

$$a \doteqdot \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n+m)}}{n+m},$$

для котораго математическое ожиданіе квадрата погрѣшности будетъ выражаться дробью

$$\frac{k_1}{n+m} = \frac{k_2}{n+m}.$$

Замѣтимъ, что равенство

$$a \doteqdot \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n+m)}}{n+m}$$

можетъ быть получено какъ слѣдствіе двухъ равенствъ

$$a \doteqdot \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n} \quad \text{и} \quad a \doteqdot \frac{a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m},$$

вѣса которыхъ пропорціональны числамъ n и m; такъ какъ

$$\frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n+m)}}{n+m} = \frac{\frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}\, n + \frac{a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m}\, m}{n+m}.$$

Въ томъ же случаѣ, когда мы имѣемъ основанія сомнѣваться въ правильности допущенія

$$k_1 = k_2,$$

возникаетъ вопросъ о приближенномъ вычисленіи чиселъ k_1 и k_2.

Мы установимъ общую формулу для приближеннаго вычисленія величинъ подобныхъ k_1 и k_2.

Въ примѣненіи къ разсматриваемому случаю эта формула даетъ два приближенныхъ равенствъ

$$k_1 \doteq k_1' \quad \text{и} \quad k_2 \doteq k_2',$$

на основаніи которыхъ мы будемъ считать отношеніе $\frac{k_1}{k_2}$, неизвѣстныхъ чиселъ k_1 и k_2, равнымъ отношенію $\frac{k_1'}{k_2'}$, извѣстныхъ чиселъ k_1' и k_2'.

Приписавъ отношенію $\frac{k_1}{k_2}$ опредѣленную величину $\frac{k_1'}{k_2'}$ мы можемъ уже воспользоваться совокупностью всѣхъ $n+m$ равенствъ

$$a \doteq a', \; a \doteq a'', \ldots, \; a \doteq a^{(n+m)}$$

для вывода новой приближенной величины a.

И, если математическія ожиданія квадратовъ погрѣшностей различныхъ приближенныхъ равенствъ мы станемъ выражать дробями съ однимъ и тѣмъ же числителемъ k_1, то можемъ вѣсъ каждаго изъ равенствъ

$$a \doteq a', \; a \doteq a'', \ldots, \; a \doteq a^{(n)}$$

считать равнымъ единицѣ, а вѣсъ каждаго изъ равенствъ

$$a \doteq a^{(n+1)}, \; a \doteq a^{(n+2)}, \ldots, \; a \doteq a^{(n+m)}$$

считать равнымъ отношенію $\frac{k_1'}{k_2'}$, въ силу тожества

$$k_2 = \frac{k_1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)}.$$

При такихъ условіяхъ изъ совокупности $n+m$ равенствъ

$$a \doteq a', \; a \doteq a'', \ldots, \; a \doteq a^{(n+m)}$$

мы выведемъ новое равенство

$$a \doteq \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)} + \frac{k_1'}{k_2'}\left(a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}\right)}{n + m\frac{k_1'}{k_2'}},$$

вѣсъ котораго равенъ

$$n + m\frac{k'_1}{k'_2}.$$

Послѣднее равенство можетъ быть выведено также изъ двухъ равенствъ

$$a \mp \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n} \quad \text{и} \quad a \mp \frac{a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m},$$

вѣса которыхъ пропорціональны числамъ

$$n \quad \text{и} \quad m\frac{k'_1}{k'_2}.$$

Намѣтивъ цѣль дальнѣйшихъ вычисленій, возвратимся къ общему случаю и соотвѣтственно приближенному равенству

$$a \mp \frac{p'a' + p''a'' + \ldots + p^{(n)}a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}$$

положимъ

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{p'a' + p''a'' + \ldots + p^{(n)}a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}} \\ \text{и} \qquad \xi &= \frac{p'u' + p''u'' + \ldots + p^{(n)}u^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}} \end{aligned}\right\} \qquad (25).$$

Примѣчаніе. Если мы будемъ разсматривать суммы

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)^2 \quad \text{и} \quad \Sigma p^{(i)}(a^{(i)} - a_0)^2$$

какъ функціи перемѣнныхъ ξ и a_0, считая всѣ остальныя величины, входящія въ эти суммы, числами данными; то формулы (25) опредѣлятъ значенія ξ и a_0, которымъ соотвѣтствуютъ наименьшія величины суммъ

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)^2 \quad \text{и} \quad \Sigma p^{(i)}(a^{(i)} - a_0)^2.$$

Слѣдовательно величина a_0, которую мы принимаемъ за новое приближенное значеніе a, сообщаетъ наименьшую величину суммѣ квадратовъ

$$\Sigma\left\{\sqrt{p^{(i)}}\,(a^{(i)} - a_0)\right\}^2;$$

отсюда и происходитъ названіе «способъ наименьшихъ квадратовъ».

Мы докажемъ, что математическое ожиданіе суммы

$$\Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)^2 = p' (u' - \xi)^2 + p'' (u'' - \xi)^2 + \ldots + p^{(n)} (u^{(n)} - \xi)^2$$

равно

$$(n-1)\,k.$$

Для этого на основаніи равенствъ

$$\Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - a) = (\xi - a)\, \Sigma p^{(i)}$$

и

$$\Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi) = 0,$$

послѣдовательно получаемъ

$$\Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)^2 = \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)(u^{(i)} - a - \xi + a)$$

$$= \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)(u^{(i)} - a) - (\xi - a)\, \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)$$

$$= \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - a - \xi + a)(u^{(i)} - a)$$

$$= \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - a)^2 - (\xi - a)\, \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - a)$$

$$= \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - a)^2 - (\xi - a)^2\, \Sigma p^{(i)};$$

и затѣмъ, принимая во вниманіе, что математическія ожиданія произведеній

$$p^{(i)} (u^{(i)} - a)^2 \quad \text{и} \quad (\xi - a)^2\, \Sigma p^{(i)}$$

равны k, изъ равенства

$$\Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)^2 = \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - a)^2 - (\xi - a)^2\, \Sigma p^{(i)}$$

выводимъ

$$\text{м. о. } \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)^2 = \text{м. о. } \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - a)^2 - \text{м. о. } (\xi - a)^2\, \Sigma p^{(i)}$$

$$= nk - k = (n-1)\,k.$$

Итакъ

$$\text{м. о. } \Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)^2 = (n-1)\,k \qquad (26).$$

Равенствомъ (26) пользуются для приближеннаго вычисленія числа k, замѣняя въ лѣвой его части математическое ожиданіе



суммы

$$\Sigma p^{(i)} (u^{(i)} - \xi)^2$$

тѣмъ частнымъ значеніемъ ея, которое соотвѣтствуетъ результатамъ наблюденій.

Такимъ образомъ получается равенство

$$k \doteqdot \frac{\Sigma p^{(i)} (a^{(i)} - a_0)^2}{n-1} \qquad (27),$$

свободное отъ постоянной погрѣшности.

Раздѣляя число

$$\frac{\Sigma p^{(i)} (a^{(i)} - a_0)^2}{n-1}$$

на вѣса приближенныхъ равенствъ, получимъ приближенныя величины математическихъ ожиданій квадратовъ ихъ погрѣшностей.

Напримѣръ

$$\frac{\Sigma p^{(i)} (a^{(i)} - a_0)^2}{(n-1)\Sigma p^{(i)}}$$

будетъ приближенною величиною математическаго ожиданія квадрата погрѣшности равенства

$$a \doteqdot a_0 = \frac{p' a' + p'' a'' + \ldots + p^{(n)} a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда всѣмъ равенствамъ

$$a \doteqdot a', \; a \doteqdot a'', \ldots, \; a \doteqdot a^{(n)}$$

мы приписываемъ одинаковый вѣсъ, имѣемъ

$$a_0 = \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}$$

и согласно формулѣ (27) для математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ данныхъ равенствъ

$$a \doteqdot a', \; a \doteqdot a'', \ldots, \; a \doteqdot a^{(n)}$$

получаемъ приближенную величину

$$k_1' = \frac{\sum \left\{a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}\right\}^2}{n-1}.$$

Подобнымъ же образомъ, разсматривая рядъ другихъ равенствъ

$$a \mp a^{(n+1)},\ a \mp a^{(n+2)}, \ldots,\ a \mp a^{(n+m)},$$

которымъ мы также приписываемъ одинаковый вѣсъ, для математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ нихъ получаемъ приближенную величину

$$k_2' = \frac{\sum \left\{a^{(j)} - \frac{a^{(n+1)} + a^{(n+2)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m}\right\}^2}{m-1},$$

гдѣ

$$j = n+1,\ n+2, \ldots,\ n+m.$$

Такимъ образомъ мы установили основные элементы способа наименьшихъ квадратовъ для случая одного неизвѣстнаго.

Сверхъ того часто разсматриваютъ вѣроятности различныхъ предположеній о величинѣ погрѣшности получаемыхъ приближенныхъ равенствъ.

Пусть будетъ Δ неизвѣстная намъ погрѣшность одного изъ равенствъ, подобныхъ равенству

$$a \mp a' \quad \text{или} \quad a \mp a_0$$

и пусть вычислена приближенная величина математическаго ожиданія квадрата Δ по указанному выше способу, или инымъ путемъ.

Обозначимъ найденное нами математическое ожиданіе Δ^2 буквою h и допустимъ, что вѣроятность неравенствъ

$$c < \Delta < d,$$

при любыхъ значеніяхъ c и d, выражается интеграломъ

$$\int_c^d Ae^{-\mu x^2}\,dx,$$

гдѣ A и μ числа постоянныя.

Тогда постоянныя A и μ опредѣлятся двумя равенствами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\mu x^2}\,dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Ax^2 e^{-\mu x^2}\,dx = h,$$

которыя приводятся къ слѣдующимъ

$$\frac{A}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и} \quad \frac{A}{\sqrt{\mu^3}} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}},$$

откуда находимъ

$$\mu = \frac{1}{2h} \quad \text{и} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2h\pi}}.$$

Соотвѣтственно этому за вѣроятность неравенствъ

$$c < \Delta < \partial$$

принимаютъ интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{2h\pi}} \int_c^\partial e^{-\frac{x^2}{2h}}\,dx,$$

который приводится къ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{c}{\sqrt{2h}}}^{\frac{\partial}{\sqrt{2h}}} e^{-z^2}\,dz,$$

посредствомъ подстановки

$$\frac{x^2}{2h} = z^2.$$

Затѣмъ, чтобы оправдать указанное выраженіе вѣроятности, разсматриваютъ погрѣшность Δ какъ сумму многихъ независимыхъ погрѣшностей и ссылаются на приближенное выраженіе вѣроятности, что сумма многихъ независимыхъ величинъ заключается въ данныхъ предѣлахъ, приведенное нами въ четвертой главѣ.

Другое оправданіе того же выраженія вѣроятности основано на согласіи его съ наблюденіями.

Для разъясненія, въ чемъ усматриваютъ это согласіе, положимъ, что n наблюденій одинаковаго достоинства дали для неизвѣстнаго числа a значенія

$$a',\ a'',\ldots,\ a^{(n)}.$$

При большихъ величинахъ n за истинную величину a принимаютъ

$$\frac{a'+a''+\ldots+a^{(n)}}{n}$$

и соотвѣтственно этому считаютъ разности

$$a^{(i)}-\frac{a'+a''+\ldots+a^{(n)}}{n}, \quad \text{при} \quad i=1,\ 2\ldots n,$$

погрѣшностями наблюденій.

Далѣе полагаютъ

$$h=\frac{\sum\left(a^{(i)}-\frac{a'+a''+\ldots+a^{(n)}}{n}\right)^2}{n-1}$$

и считаютъ двоякимъ образомъ число погрѣшностей, лежащихъ въ данныхъ предѣлахъ.

Именно, съ одной стороны, считаютъ число разностей

$$a^{(i)}-\frac{a'+a''+\ldots+a^{(n)}}{n},$$

которыя лежатъ въ данныхъ предѣлахъ; а, съ другой стороны, на основаніи теоремы Бернулли и указаннаго выше выраженія вѣроятности неравенствъ

$$c<\Delta<d$$

допускаютъ, что число погрѣшностей, лежащихъ между c и d равно

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{c:\sqrt{2h}}^{d:\sqrt{2h}} e^{-z^2}\,dz.$$

И во многихъ случаяхъ такіе два счета даютъ для числа погрѣшностей одинаковыя или близкія величины.

Вмѣсто математическаго ожиданія квадрата погрѣшности часто разсматриваютъ *среднюю квадратичную ошибку* и *вѣроятную ошибку*.

Средняя квадратичная ошибка, равная корню квадратному изъ математическаго ожиданія квадрата погрѣшности, при сдѣ-

ланномъ нами предположеніи приведется къ

$$\sqrt{h}.$$

А вѣроятная ошибка опредѣляется условіемъ одинаковой вѣроятности предположенія, что числовая величина погрѣшности меньше вѣроятной ошибки, и предположенія, что числовая величина погрѣшности больше вѣроятной ошибки.

Если по прежнему допустить, что вѣроятность неравенствъ

$$c < \Delta < \partial,$$

при любыхъ значеніяхъ c и ∂, выражается выше приведеннымъ интеграломъ; то вѣроятная ошибка выразится произведеніемъ

$$\rho \sqrt{h},$$

гдѣ число ρ представляетъ рѣшеніе уравненія

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2},$$

откуда находимъ

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}} = 0,47693 \ldots . \quad \text{и} \quad \rho = 0,67448 \ldots .$$

Въ виду такихъ опредѣленныхъ соотношеній между математическимъ ожиданіемъ квадрата погрѣшности, среднею квадратичною ошибкою и вѣроятною ошибкою, въ каждомъ частномъ случаѣ достаточно разсматривать одну изъ этихъ трехъ величинъ.

§ 36. *Случай многихъ неизвѣстныхъ.*

Переходя къ случаю многихъ неизвѣстныхъ, положимъ, что требуется найти m чиселъ

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_m$$

и что наблюденія дали приближенныя значенія

$$b', \ b'', \ldots, \ b^{(n)}$$

выраженій

$$A_1' a_1 + A_2' a_2 + \ldots + A_m' a_m,$$

$$A_1'' a_1 + A_2'' a_2 + \ldots + A_m'' a_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1^{(n)} a_1 + A_2^{(n)} a_2 + \ldots + A_m^{(n)} a_m,$$

линейныхъ относительно искомыхъ чиселъ.

Коэффиціенты A этихъ n выраженій мы предполагаемъ числами данными.

Каждое наблюденіе мы будемъ попрежнему разсматривать какъ частный случай многихъ наблюденій.

Соотвѣтственно этому рядомъ съ каждымъ числомъ $b^{(j)}$, которое доставлено наблюденіемъ и представляетъ приближенное значеніе суммы

$$A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m,$$

мы будемъ разсматривать возможный результатъ

$$u^{(j)}$$

того же наблюденія.

Далѣе мы будемъ предполагать, что равенство

$$A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m \doteqdot b^{(j)}$$

свободно отъ постоянной погрѣшности; другими словами будемъ считать математическое ожиданіе числа $u^{(j)}$ равнымъ суммѣ

$$A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m.$$

Степень достоинства приближенныхъ равенствъ

$$\left.\begin{array}{l} A_1' a_1 + A_2' a_2 + \ldots + A_m' a_m \doteqdot b' \\ A_1'' a_1 + A_2'' a_2 + \ldots + A_m'' a_m \doteqdot b'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1^{(n)} a_1 + A_2^{(n)} a_2 + \ldots + A_m^{(n)} a_m \doteqdot b^{(n)} \end{array}\right\} \quad (28)$$

мы будемъ оцѣнивать ихъ вѣсами

$$p',\ p'',\ldots,\ p^{(n)},$$

полагая

$$\text{м. о.}\,[u^{(j)}-c^{(j)}]^2=\frac{k}{p^{(j)}} \qquad (29)$$

при

$$c^{(j)}=A_1^{(j)}a_1+A_2^{(j)}a_2+\ldots\ldots+A_m^{(j)}a_m \qquad (30).$$

Наблюденія мы будемъ предполагать независимыми для того, чтобы математическія ожиданія произведеній каждыхъ двухъ различныхъ множителей, изъ совокупности

$$u'-c',\ u''-c'',\ldots,\ u^{(n)}-c^{(n},$$

приводились къ нулю.

Затѣмъ мы разсмотримъ отдѣльно два предположенія.

Начнемъ съ предположенія, что намъ неизвѣстно никакихъ соотношеній между искомыми числами

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m.$$

Пусть a_l означаетъ одно изъ искомыхъ чиселъ.

Для вывода, изъ равенствъ (28), приближенной величины a_l вводимъ вспомогательные множители

$$\lambda',\ \lambda'',\ldots,\ \lambda^{(n)}$$

и полагаемъ

$$a_l \mp \lambda' b'+\lambda'' b''+\ldots\ldots+\lambda^{(n)} b^{(n)} \qquad (31).$$

Коэффиціенты

$$\lambda',\ \lambda'',\ldots,\ \lambda^{(n)}$$

мы подчинимъ такимъ же двумъ условіямъ, какъ и въ случаѣ одного неизвѣстнаго.

Первое условіе состоитъ въ томъ, чтобы изъ установленныхъ положеній несомнѣнно слѣдовало, что равенство (31) свободно отъ постоянной погрѣшности.

Въ силу этого условія мы разсматриваемъ только такія совокупности чиселъ

$$\lambda',\ \lambda'',\ldots,\ \lambda^{(n)},$$

для каждой изъ которыхъ выполняется равенство

$$\text{м. о. } (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}) = a_l$$

при произвольныхъ значеніяхъ

$$a_1, \; a_2, \ldots, \; a_m.$$

Но

$$\text{м. о. } (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}) = \lambda' c' + \lambda'' c'' + \ldots + \lambda^{(n)} c^{(n)}$$

и

$$c^{(j)} = A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m,$$

поэтому равенство

$$\text{м. о. } (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}) = a_l$$

приводится къ слѣдующему

$$\left.\begin{aligned} &(A_1' \lambda' + A_1'' \lambda'' + \ldots + A_1^{(n)} \lambda^{(n)})\, a_1 \\ &+ (A_2' \lambda' + A_2'' \lambda'' + \ldots + A_2^{(n)} \lambda^{(n)})\, a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (A_m' \lambda' + A_m'' \lambda'' + \ldots + A_m^{(n)} \lambda^{(n)})\, a_m \end{aligned}\right\} = a_l,$$

которое въ виду произвольности чиселъ

$$a_1, \; a_2, \ldots, \; a_m$$

разбивается на m равенствъ; а именно, должно быть

$$\left.\begin{aligned} A_l' \lambda' + A_l'' \lambda'' + \ldots + A_l^{(n)} \lambda^{(n)} = 1 \\ \text{и} \qquad A_i' \lambda' + A_i'' \lambda'' + \ldots + A_i^{(n)} \lambda^{(n)} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (32),$$

гдѣ i означаетъ любое изъ чиселъ

$$1, \; 2, \ldots, \; m,$$

кромѣ l.

Второе условіе состоитъ въ томъ, чтобы вѣсъ равенства (31) былъ наибольшій.

Мы найдемъ этотъ вѣсъ, разсматривая математическое ожиданіе квадрата разности

$$\xi_l - a_l,$$

гдѣ

$$\xi_l = \lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)} \qquad (33).$$

Что же касается разности

$$\xi_l - a_l,$$

то она равна

$$\lambda'(u' - c') + \lambda''(u'' - c'') + \ldots + \lambda^{(n)}(u^{(n)} - c^{(n)});$$

ибо

$$a_l = \lambda' c' + \lambda'' c'' + \ldots + \lambda^{(n)} c^{(n)}.$$

Поэтому

$$(\xi_l - a_l)^2 = \lambda'\lambda'(u' - c')^2 + \lambda''\lambda''(u'' - c'')^2 + \ldots + \lambda^{(n)}\lambda^{(n)}(u^{(n)} - c^{(n)})^2$$
$$+ 2\lambda'\lambda''(u' - c')(u'' - c'') + \ldots$$

и

$$\text{м. о. } (\xi_l - a_l)^2 = k\left\{\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right\};$$

слѣдовательно вѣсъ приближеннаго равенства (31) выражается дробью

$$\frac{1}{\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}},$$

какъ и въ случаѣ одного неизвѣстнаго, и достигаетъ своего наибольшаго значенія тогда, когда сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигаетъ своего наименьшаго значенія.

Мы пришли такимъ образомъ къ слѣдующей задачѣ.

Изъ различныхъ совокупностей коэффиціентовъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

удовлетворяющихъ условіямъ (32), найти ту, для которой сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигаетъ своей наименьшей величины.

Чтобы примѣнить къ этой задачѣ извѣстный способъ вспомогательныхъ множителей, составляемъ выраженіе

$$S=\frac{1}{2}T-\mu_1 T_1-\mu_2 T_2\ldots\ldots-\mu_m T_m,$$

гдѣ

$$T=\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}},$$

$$T_1=A_1'\lambda'+A_1''\lambda''+\ldots\ldots+A_1^{(n)}\lambda^{(n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_m=A_m'\lambda'+A_m''\lambda''+\ldots\ldots+A_m^{(n)}\lambda^{(n)},$$

коэффиціенты же

$$\mu_1,\ \mu_2,\ldots\ldots,\ \mu_m$$

представляютъ вспомогательныя неизвѣстныя.

Считая числа

$$\mu_1,\ \mu_2,\ldots\ldots,\ \mu_m$$

постоянными, а

$$\lambda',\ \lambda'',\ldots\ldots,\ \lambda^{(n)}$$

перемѣнными, согласно извѣстному правилу приравниваемъ нулю производныя отъ S по каждому изъ этихъ перемѣнныхъ.

Мы получаемъ систему n уравненій

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\lambda'}{p'}=\mu_1 A_1'+\mu_2 A_2'+\ldots\ldots+\mu_m A_m'\\ \frac{\lambda''}{p''}=\mu_1 A_1''+\mu_2 A_2''+\ldots\ldots+\mu_m A_m''\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}=\mu_1 A_1^{(n)}+\mu_2 A_2^{(n)}+\ldots\ldots+\mu_m A_m^{(n)}\end{array}\right\}\quad(34),$$

которая вмѣстѣ съ прежнею системою m уравненій (32) должна



служить для опредѣленія $n+m$ чиселъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m.$$

Для рѣшенія составленныхъ нами уравненій подставляемъ въ уравненія (32) выраженія

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

черезъ вспомогательные множители

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m,$$

доставляемыя уравненіями (34).

Такая подстановка приводитъ къ системѣ m уравненій

$$\left.\begin{array}{l}
G_{1,1}\,\mu_1 + G_{1,2}\,\mu_2 + \ldots + G_{1,m}\,\mu_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{l-1,1}\,\mu_1 + G_{l-1,2}\,\mu_2 + \ldots + G_{l-1,m}\,\mu_m = 0, \\
G_{l,1}\,\mu_1 + G_{l,2}\,\mu_2 + \ldots + G_{l,m}\,\mu_m = 1, \\
G_{l+1,1}\,\mu_1 + G_{l+1,2}\,\mu_2 + \ldots + G_{l+1,m}\,\mu_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{m,1}\,\mu_1 + G_{m,2}\,\mu_2 + \ldots + G_{m,m}\,\mu_m = 0
\end{array}\right\} \quad (35),$$

коэффиціенты которой опредѣляются по формулѣ

$$G_{i,j} = G_{j,i} = p' A'_i A'_j + p'' A''_i A''_j + \ldots + p^{(n)} A^{(n)}_i A^{(n)}_j \quad (36).$$

Замѣтимъ, что опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix}
G_{1,1}, & G_{1,2}, & \ldots, & G_{1,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{l,1}, & G_{l,2}, & \ldots, & G_{l,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{m,1}, & G_{m,2}, & \ldots, & G_{m,m}
\end{vmatrix} \quad (37),$$

составленный изъ всѣхъ этихъ коэффиціентовъ, долженъ, на

основаніи теоремы умноженія опредѣлителей, быть равнымъ суммѣ квадратовъ всѣхъ системъ m^2 элементовъ, которыя получаются изъ системы

$$\left.\begin{array}{l} A_1'\sqrt{p'},\ A_1''\sqrt{p''},\ A_1'''\sqrt{p'''},\ldots,\ A_1^{(n)}\sqrt{p^{(n)}} \\ A_2'\sqrt{p'},\ A_2''\sqrt{p''},\ A_2'''\sqrt{p'''},\ldots,\ A_2^{(n)}\sqrt{p^{(n)}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m'\sqrt{p'},\ A_m'\sqrt{p''},\ A_m'''\sqrt{p'''},\ldots,\ A^{(n)}\sqrt{p^{(n)}} \end{array}\right\} \quad (A)$$

посредствомъ вычеркиванія $n-m$ столбцовъ, если только

$$n \geqq m;$$

если же $n < m$, то опредѣлитель Δ равенъ нулю.

Поэтому для существованія одного и только одного рѣшенія поставленныхъ нами уравненій надо исключить изъ разсмотрѣнія какъ тѣ случаи, когда $n < m$, такъ и тѣ случаи, когда при $n \geqq m$ обращаются въ нуль опредѣлители всѣхъ системъ m^2 элементовъ, которыя получаются изъ (A) посредствомъ вычеркиванія $n-m$ столбцовъ.

Необходимость исключенія такихъ случаевъ можетъ быть установлена независимо отъ излагаемыхъ нами пріемовъ.

Она вытекаетъ изъ того обстоятельства, что въ исключаемыхъ нами случаяхъ по даннымъ величинамъ суммъ

$$\begin{array}{c} A_1'a_1 + A_2'a_2 + \ldots + A_m'a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1^{(n)}a_1 + A_2^{(n)}a_2 + \ldots + A_m^{(n)}a_m \end{array}$$

нельзя опредѣлить искомыхъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m.$$

Изъ вспомогательныхъ множителей

$$\mu_1,\ \mu_2,\ldots,\ \mu_m$$

особенное значеніе имѣетъ μ_l; такъ какъ дробь

$$\frac{1}{\mu_l}$$

выражаетъ вѣсъ приближеннаго равенства

$$a_l \pm \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)},$$

если коэффиціенты

$$\lambda',\ \lambda'', \ldots,\ \lambda^{(n)}$$

опредѣлены выше установленными уравненіями.

При другихъ же значеніяхъ

$$\lambda',\ \lambda'', \ldots,\ \lambda^{(n)},$$

удовлетворяющихъ только уравненіямъ (32), вѣсъ равенства

$$a_l \pm \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}$$

будетъ меньше $\frac{1}{\mu_l}$, какъ мы сейчасъ докажемъ.

Пусть въ самомъ дѣлѣ совокупность чиселъ

$$\mu_1,\ \mu_2, \ldots,\ \mu_m$$

будетъ рѣшеніемъ системы уравненій (35).

Подразумѣвая затѣмъ подъ

$$\lambda',\ \lambda'', \ldots,\ \lambda^{(n)}$$

перемѣнныя числа, обозначимъ символами

$$\overline{\lambda'},\ \overline{\lambda''}, \ldots,\ \overline{\lambda^{(n)}}$$

значенія этихъ перемѣнныхъ, опредѣляемыя уравненіями (34); иначе сказать, положимъ

$$\frac{\overline{\lambda^{(i)}}}{p^{(i)}} = \mu_1 A_1^{(i)} + \mu_2 A_2^{(i)} + \ldots + \mu_m A_m^{(i)}$$

при

$$i = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

При такихъ условіяхъ выраженіе

$$S = \frac{1}{2} T - \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 \ldots - \mu_m T_m$$

можетъ быть представлено подъ видомъ алгебраической суммы

$$\frac{(\lambda' - \overline{\lambda'})^2}{2p'} + \frac{(\lambda'' - \overline{\lambda''})^2}{2p''} + \ldots + \frac{(\lambda^{(n)} - \overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}}$$

$$- \frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{2p'} - \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{2p''} - \ldots - \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{2p^{(n)}}.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right) - \mu_l$$

во всѣхъ случаяхъ, когда числа

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

удовлетворяютъ вышеустановленнымъ уравненіямъ (32).

Слѣдовательно для всякой системы чиселъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

которая удовлетворяетъ уравненіямъ (32), должно быть

$$\frac{\lambda'\lambda'}{2p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{2p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{2p^{(n)}} = \frac{(\lambda' - \overline{\lambda'})^2}{2p'} + \ldots + \frac{(\lambda^{(n)} - \overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}} + \mu_l$$

$$- \frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{2p'} - \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{2p''} - \ldots - \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{2p^{(n)}};$$

откуда при

$$\lambda' = \overline{\lambda'},\ \lambda'' = \overline{\lambda''}, \ldots, \lambda^{(n)} = \overline{\lambda^{(n)}}$$

выводимъ

$$\frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{p'} + \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{p''} + \ldots + \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{p^{(n)}} = \mu_l.$$

Отсюда нетрудно также заключить, что μ_l представляетъ наименьшую величину, которой можетъ достигать сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

при соблюденіи уравненій (32); ибо сумма

$$\frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{p'}+\frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{p^{(n)}}$$

равна μ_l по доказанному, сумма же

$$\frac{(\lambda'-\overline{\lambda'})^2}{2p'}+\ldots\ldots+\frac{(\lambda^{(n)}-\overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}}$$

не можетъ быть числомъ отрицательнымъ.

Итакъ изъ всѣхъ равенствъ

$$a_l \neq \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots\ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)},$$

о которыхъ на основаніи нашихъ данныхъ и условій можно утверждать, что они свободны отъ постоянной погрѣшности, наибольшимъ вѣсомъ отличается то, коэффиціенты котораго

$$\lambda',\ \lambda'',\ldots,\ \lambda^{(n)}$$

опредѣляются уравненіями (34) и (35); и этотъ наибольшій вѣсъ равенъ дроби

$$\frac{1}{\mu_l}.$$

Послѣднюю же дробь, знаменатель которой опредѣляется изъ системы уравненій (35), можно при помощи обозначеній теоріи опредѣлителей представить отношеніемъ

$$\frac{\Delta}{\Delta_{l,\,l}},$$

гдѣ

$$\Delta_{l,\,l} = \begin{vmatrix} G_{1,\,1} & ,\ldots, & G_{1,\,l-1} & , G_{1,\,l+1} & ,\ldots, & G_{1,\,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{l-1,\,1} & ,\ldots, & G_{l-1,\,l-1} & , G_{l-1,\,l+1} & ,\ldots, & G_{l-1,\,m} \\ G_{l+1,\,1} & ,\ldots, & G_{l+1,\,l-1} & , G_{l+1,\,l+1} & ,\ldots, & G_{l+1,\,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{m,\,1} & ,\ldots, & G_{m,\,l-1} & , G_{m,\,l+1} & ,\ldots, & G_{m,\,m} \end{vmatrix}.$$

Въ дальнѣйшихъ выводахъ намъ потребуются и другіе миноры, перваго порядка, опредѣлителя Δ.

Припомнимъ, что при помощи своихъ миноровъ опредѣлитель Δ выражается суммами:

$$\Delta = G_{1,1}\Delta_{1,1} + G_{1,2}\Delta_{1,2} + .. + G_{1,m}\Delta_{1,m} = G_{1,1}\Delta_{1,1} + G_{2,1}\Delta_{2,1} + .. + G_{m,1}\Delta_{m,1}$$

$$= G_{2,1}\Delta_{2,1} + G_{2,2}\Delta_{2,2} + .. + G_{2,m}\Delta_{2,m} = G_{1,2}\Delta_{1,2} + G_{2,2}\Delta_{2,2} + .. + G_{m,2}\Delta_{m,2}$$

. . . .

гдѣ вообще $\Delta_{i,l}$ означаетъ произведеніе $(-1)^{i+l}$ на опредѣлитель, получаемый изъ Δ посредствомъ вычеркиванія столбца

$$\begin{matrix} G_{1,l} \\ G_{2,l} \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{m,l} \end{matrix}$$

и строки

$$G_{i,1}, \; G_{i,2}, \ldots, \; G_{i,m}.$$

Припомнимъ также, что каждая сумма

$$G_{1,i}\Delta_{1,j} + G_{2,i}\Delta_{2,j} + \ldots + G_{m,i}\Delta_{m,j},$$

гдѣ i и j два различныхъ числа изъ совокупности чиселъ

$$1, \; 2, \; 3, \ldots, \; m,$$

обращается въ нуль, равно какъ и сумма

$$G_{i,1}\Delta_{j,1} + G_{i,2}\Delta_{j,2} + \ldots + G_{i,m}\Delta_{j,m}.$$

Наконецъ нетрудно установить равенства

$$\Delta_{i,j} = \Delta_{j,i},$$

какъ слѣдствіе симметричности опредѣлителя Δ.

Итакъ, полагая

$$a_l^0 = \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)} \qquad (38)$$

и опредѣляя коэффиціенты

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

уравненіями (34) и (35) при различныхъ значеніяхъ l, мы можемъ получить приближенныя величины

$$a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0$$

для всѣхъ искомыхъ чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_m.$$

Тѣ же самыя приближенныя величины могутъ быть опредѣлены одною довольно простою системою уравненій.

§ 37. Имѣя въ виду придти къ этой системѣ, составимъ выраженія

$$\left.\begin{aligned} W &= \Sigma p\,(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + \ldots + A_m\xi_m - u)^2 \\ &\text{и} \\ W_0 &= \Sigma p\,(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b)^2 \end{aligned}\right\} \quad (39),$$

первое изъ которыхъ означаетъ сумму

$$p'(A_1'\xi_1 + A_2'\xi_2 + \ldots + A_m'\xi_m - u')^2 + p''(A_1''\xi_1 + \ldots + A_m''\xi_m - u'')^2$$
$$+ \ldots + p^{(n)}(A_1^{(n)}\xi_1 + A_2^{(n)}\xi_2 + \ldots + A_m^{(n)}\xi_m - u^{(n)})^2,$$

второе же получается изъ перваго черезъ соотвѣтственную замѣну

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, u', u'', \ldots, u^{(n)}$$

числами

$$a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0, b', b'', \ldots, b^{(n)}.$$

Мы будемъ разсматривать выраженіе W какъ функцію перемѣнныхъ

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

а выраженіе W^0 какъ функцію перемѣнныхъ

$$a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0,$$

считая постоянными не только данныя числа

$$p', p'', \ldots, p^{(n)}, b', b'', \ldots, b^{(n)}$$

но и неопредѣленныя числа

$$u', u'', \ldots, u^{(n)}.$$

При такихъ условіяхъ не трудно установить, что W достигаетъ своей наименьшей величины для тѣхъ значеній

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

которыя опредѣляются уравненіями (33), (34) и (35) при

$$l = 1, 2, \ldots, m,$$

и потому W^0 достигаетъ своей наименьшей величины для тѣхъ значеній

$$a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0,$$

которыя опредѣляются уравненіями (34), (35) и (38).

Для доказательства приравниваемъ нулю производныя выраженія W по

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

что даетъ намъ систему уравненій

$$\left.\begin{array}{l} G_{1,1}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,1}\,\xi_m = A_1' p' u' + \ldots + A_1^{(n)} p^{(n)} u^{(n)} \\ G_{1,2}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,2}\,\xi_m = A_2' p' u' + \ldots + A_2^{(n)} p^{(n)} u^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{1,m}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,m}\,\xi_m = A_m' p' u' + \ldots + A_m^{(n)} p^{(n)} u^{(n)} \end{array}\right\} (40),$$

гдѣ $G_{i,j}$ по прежнему означаетъ сумму

$$p' A_i' A_j' + p'' A_i'' A_j'' + \ldots + p^{(n)} A_i^{(n)} A_j^{(n)}.$$

Такою системою опредѣляются тѣ значенія

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

для которыхъ выраженіе W достигаетъ своей наименьшей величины.

Придавая затѣмъ буквѣ l прежнее значеніе, можемъ изъ системы уравненій (40) исключить всѣ неизвѣстныя

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$$

кромѣ ξ_l, при помощи тѣхъ же множителей

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m,$$

которыми мы пользовались раньше.

Дѣйствительно изъ уравненій (40) легко вытекаетъ уравненіе

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 (G_{1,1}\xi_1+\ldots+G_{m,1}\xi_m) \\ +\mu_2 (G_{1,2}\xi_1+\ldots+G_{m,2}\xi_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\mu_m (G_{1,m}\xi_1+\ldots+G_{m,m}\xi_m) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \mu_1 (A_1' p' u'+\ldots+A_1^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}) \\ +\mu_2 (A_2' p' u'+\ldots+A_2^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\mu_m (A_m' p' u'+\ldots+A_m^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}), \end{array}\right.$$

которое въ силу уравненій (35) даетъ

$$\xi_l = \left\{\begin{array}{l} (\mu_1 A_1'+\mu_2 A_2'+\ldots+\mu_m A_m') p' u' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(\mu_1 A_1^{(n)}+\mu_2 A_2^{(n)}+\ldots+\mu_m A_m^{(n)}) p^{(n)} u^{(n)} \end{array}\right.$$

Сравнивая послѣднее выраженіе ξ_l съ выраженіемъ ξ_l, опредѣленнымъ формулою (33) и равенствами (34), тотчасъ убѣждаемся въ тожественности этихъ двухъ выраженій ξ_l.

Итакъ установленныя раньше формулы и уравненія опредѣляютъ тѣ же величины

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

какъ и система (40).

Нашъ выводъ сохраняетъ силу, каковы бы ни были значенія чиселъ

$$u', u'', \ldots, u^{(n)}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$u' = b', \; u'' = b'', \ldots, \; u^{(n)} = b^{(n)},$$

отсюда слѣдуетъ, что выраженіе W^0 дѣйствительно достигаетъ своей наименьшей величины при тѣхъ значеніяхъ

$$a_1^0, \; a_2^0, \ldots, \; a_m^0,$$

опредѣленіемъ которыхъ мы занимались въ предыдущемъ параграфѣ.

Этимъ обстоятельствомъ объясняется названіе способъ наименьшихъ квадратовъ; ибо W^0 представляетъ сумму квадратовъ выраженій вида

$$\sqrt{p}\,(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b).$$

Итакъ всѣ искомыя числа

$$a_1^0, \; a_2^0, \ldots, \; a_m^0,$$

служащія приближенными величинами для неизвѣстныхъ

$$a_1, \; a_2, \ldots, \; a_m,$$

могутъ быть найдены изъ одной системы уравненій

$$\left.\begin{array}{l}
G_{1,1}\, a_1^0 + \ldots + G_{m,1}\, a_m^0 = A_1' p' b' + \ldots + A_1^{(n)} p^{(n)} b^{(n)} \\
G_{1,2}\, a_1^0 + \ldots + G_{m,2}\, a_m^0 = A_2' p' b' + \ldots + A_2^{(n)} p^{(n)} b^{(n)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{1,m}\, a_1^0 + \ldots + G_{m,m}\, a_m^0 = A_m' p' b' + \ldots + A_m^{(n)} p^{(n)} b^{(n)}
\end{array}\right\} \quad (41).$$

Величины же

$$\xi_1, \; \xi_2, \ldots, \; \xi_m,$$

связанныя съ величинами

$$u', \; u'', \ldots, \; u^{(n)}$$

уравненіями (33), (34) и (35), удовлетворяютъ системѣ уравненій (40).

Разсматривая наконецъ вмѣсто

$$u', u'', \ldots, u^{(n)}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$$

разности

$$u' - c' = v', \ u'' - c'' = v'', \ldots, u^{(n)} - c^{(n)} = v^{(n)}$$

$$\xi_1 - a_1 = \eta_1, \ \xi_2 - a_2 = \eta_2, \ldots, \xi_m - a_m = \eta_m,$$

можемъ установить уравненія

$$\left.\begin{array}{l} G_{1,1}\,\eta_1 + G_{2,1}\,\eta_2 + \ldots + G_{m,1}\,\eta_m = \omega_1 \\ G_{1,2}\,\eta_1 + G_{2,2}\,\eta_2 + \ldots + G_{m,2}\,\eta_m = \omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{1,m}\,\eta_1 + G_{2,m}\,\eta_2 + \ldots + G_{m,m}\,\eta_m = \omega_m \end{array}\right\} \quad (42),$$

гдѣ вообще

$$\omega_i = A'_i p' v' + A''_i p'' v'' + \ldots + A^{(n)}_i p^{(n)} v^{(n)} \quad (43).$$

Эти уравненія послужатъ намъ для вторичнаго опредѣленія вѣсовъ приближенныхъ равенствъ

$$a_1 \doteqdot a_1^0, \ a_2 \doteqdot a_2^0, \ldots, a_m \doteqdot a_m^0,$$

иначе сказать, для опредѣленія отношеній неизвѣстнаго числа k къ математическимъ ожиданіямъ величинъ

$$\eta_1^2 = (\xi_1 - a_1)^2, \ \eta_2^2 = (\xi_2 - a_2)^2, \ldots, \ \eta_m^2 = (\xi_m - a_m)^2.$$

При помощи тѣхъ же уравненій мы покажемъ, что математическое ожиданіе выраженія W равно

$$(n - m)\, k,$$

если

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$$

связаны съ

$$u', u'', \ldots, u^{(n)}$$

уравненіями (40), какъ мы и предполагаемъ.

Для намѣченной цѣли изъ уравненій (42) выводимъ

$$\Delta\eta_1 = \Delta_{1,1}\,\omega_1 + \Delta_{1,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{1,m}\,\omega_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta\eta_m = \Delta_{m,1}\,\omega_1 + \Delta_{m,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{m,m}\,\omega_m,$$

гдѣ Δ и $\Delta_{i,j}$ имѣютъ вышеустановленный смыслъ.

Помноживъ затѣмъ обѣ части равенства

$$\Delta\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_1 + \Delta_{l,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_m$$

на ω_j и η_i, получаемъ два равенства

$$\Delta\omega_j\,\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_j\,\omega_1 + \Delta_{l,2}\,\omega_j\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_j\,\omega_m$$

и

$$\Delta\eta_i\,\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_1\,\eta_i + \Delta_{l,2}\,\omega_2\,\eta_i + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_m\,\eta_i,$$

которыя даютъ возможность свести разысканіе математическихъ ожиданій произведеній

$$\omega_j\,\eta_l \quad \text{и} \quad \eta_i\,\eta_l$$

къ разысканію математическихъ ожиданій произведеній вида

$$\omega_i\,\omega_j.$$

А произведеніе $\omega_i\,\omega_j$ равное

$$(A_i'p'v' + \ldots + A_i^{(n)}p^{(n)}v^{(n)})\,(A_j'p'v' + \ldots + A_j^{(n)}p^{(n)}v^{(n)})$$

приводится къ суммѣ

$$A_i'A_j'(p'v')^2 + A_i''A_j''(p''v'')^2 + \ldots + A_i^{(n)}A_j^{(n)}(p^{(n)}v^{(n)})^2$$

и такихъ произведеній, каждое изъ которыхъ содержитъ, кромѣ постоянныхъ, два различныхъ количества системы

$$v',\ v'',\ \ldots,\ v^{(n)}$$

Поэтому математическое ожиданіе произведенія $\omega_i\,\omega_j$ одинаково съ математическимъ ожиданіемъ суммы

$$A_i'A_j'(p'v')^2 + A_i''A_j''(p''v'')^2 + \ldots + A_i^{(n)}A_j^{(n)}(p^{(n)}v^{(n)})^2;$$

послѣднее же, какъ нетрудно видѣть, равно произведенію числа k на сумму

$$p' A'_i A'_j + p'' A''_i A''_j + \ldots + p^{(n)} A^{(n)}_i A^{(n)}_j,$$

которую мы обозначаемъ символомъ

$$G_{i,\,j}.$$

Слѣдовательно

$$\text{м. о. } \omega_i \omega_j = kG_{i,\,j}$$

и потому равенство

$$\Delta\omega_j \eta_l = \Delta_{l,\,1}\, \omega_j \omega_1 + \Delta_{l,\,2}\, \omega_j \omega_2 + \ldots + \Delta_{l,\,m}\, \omega_j \omega_m$$

даетъ

$$\Delta\,(\text{м. о. } \omega_j \eta_l) = \Delta_{l,\,1}\,(\text{м. о. } \omega_j \omega_1) + \ldots + \Delta_{l,\,m}\,(\text{м. о. } \omega_j \omega_m)$$
$$= k\left\{G_{j,\,1}\,\Delta_{l,\,1} + G_{j,\,2}\,\Delta_{l,\,2} + \ldots + G_{j,\,m}\,\Delta_{l,\,m}\right\}.$$

Отсюда заключаемъ, что математическія ожиданія произведеній

$$\omega_1 \eta_1,\ \omega_2 \eta_2,\ \ldots,\ \omega_m \eta_m$$

равны k, математическія же ожиданія другихъ произведеній

$$\omega_j \eta_l,$$

гдѣ j отлично отъ l, равны нулю; ибо

$$G_{l,\,1}\,\Delta_{l,\,1} + G_{l,\,2}\,\Delta_{l,\,2} + \ldots + G_{l,\,m}\,\Delta_{l,\,m} = \Delta$$

и

$$G_{j,\,1}\,\Delta_{l,\,1} + G_{j,\,2}\,\Delta_{l,\,2} + \ldots + G_{j,\,m}\,\Delta_{l,\,m} = 0,$$

если j не равно l.

На этомъ основаніи изъ формулы

$$\Delta\eta_l \eta_i = \Delta_{l,\,1}\, \omega_1 \eta_i + \Delta_{l,\,2}\, \omega_2 \eta_i + \ldots + \Delta_{l\,m}\, \omega_m \eta_i$$

выводимъ

$$\Delta\,(\text{м. о. } \eta_l \eta_i) = \Delta_{l,\,1}\,(\text{м. о. } \omega_1 \eta_i) + \ldots + \Delta_{l,\,m}\,(\text{м. о. } \omega_m \eta_i)$$
$$= k\Delta_{l,\,i}$$

и въ частности

$$\text{м. о. } \eta_l \eta_l = \text{м. о. } (\xi_l - a_l)^2 = k \frac{\Delta_{l,\,l}}{\Delta} \qquad (44).$$

Итакъ математическое ожиданіе квадрата погрѣшности приближеннаго равенства

$$a_l \doteqdot a_l^0$$

выражается произведеніемъ

$$k \frac{\Delta_{l,\,l}}{\Delta};$$

иначе сказать вѣсъ равенства

$$a_l \doteqdot a_l^0$$

выражается дробью

$$\frac{\Delta}{\Delta_{l,\,l}},$$

что было найдено и другимъ путемъ.

Обращаясь къ выраженію

$$W = \Sigma p\,(A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + \ldots + A_m \xi_m - u)^2,$$

прежде всего распространимъ принятое нами обозначеніе на другія суммы, аналогичныя W; именно сумму

$$f(p', A'_1, \ldots, A'_m, u', c', v') + f(p'', A''_1, \ldots, A''_m, u'', c'', v'') + \\ + \ldots + f(p^{(n)}, A^{(n)}_1, \ldots, A^{(n)}_m, u^{(n)}, c^{(n)}, v^{(n)})$$

будемъ для краткости изображать такъ

$$\Sigma f(p, A_1, A_2, \ldots, A_m, u, c, v)$$

для любой функціи

$$f(p, A_1, A_2, \ldots, A_m, u, c, v)$$

перемѣнныхъ

$$p, A_1, A_2, \ldots, A_m, u, c, v,$$

причемъ

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$$

могутъ играть роль постоянныхъ.

Далѣе замѣтимъ, что въ силу равенства

$$c^{(j)} = A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m$$

должно быть

$$A_1^{(j)} \xi_1 + A_2^{(j)} \xi_2 + \ldots + A_m^{(j)} \xi_m - u^{(j)} = A_1^{(j)} \eta_1 + \ldots + A_m^{(j)} \eta_m - v^{(j)}.$$

Поэтому W совпадаетъ съ суммою

$$\Sigma p\,(A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_m \eta_m - v)^2.$$

Съ другой стороны, простыя выкладки послѣдовательно даютъ

$$\Sigma p\,(A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_m \eta_m - v)^2$$

$$= \eta_1 \Sigma p A_1 (A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_m \eta_m - v) +$$

$$+ \ldots + \eta_m \Sigma p A_m (A_1 \eta_1 + \ldots + A_m \eta_m - v)$$

$$- \Sigma pv\,(A_1 \eta_1 + \ldots + A_m \eta_m - v)$$

$$= - \Sigma pv\,(A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_m \eta_m - v)$$

$$= \Sigma pv^2 - \eta_1 \Sigma p A_1 v - \eta_2 \Sigma p A_2 v - \ldots - \eta_m \Sigma p A_m v$$

$$= \Sigma pv^2 - \eta_1 \omega_1 - \eta_2 \omega_2 - \ldots - \eta_m \omega_m;$$

ибо каждая изъ суммъ

$$\Sigma p A_1 (A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_m \eta_m - v),$$

$$\Sigma p A_2 (A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_m \eta_m - v),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Sigma p A_m (A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_m \eta_m - v),$$

равна нулю согласно уравненіямъ (42).

Слѣдовательно

$$W = \Sigma pv^2 - \eta_1 \omega_1 - \eta_2 \omega_2 - \ldots - \eta_m \omega_m$$

и

$$\text{м. о. } W = \Sigma\,\text{м. о. } pv^2 - \text{м. о. } \eta_1 \omega_1 - \text{м. о. } \eta_2 \omega_2 - \ldots - \text{м. о. } \eta_m \omega_m$$

$$= (n - m)\,k;$$

такъ какъ математическое ожиданіе каждаго изъ произведеній

$$p'v'v', \ldots, p^{(n)}v^{(n)}v^{(n)}, \ \eta_1\omega_1, \ \eta_2\omega_2, \ldots, \eta_m\omega_m$$

равно числу k.

Формула

$$\text{м. о. } W = (n-m)k \tag{45}$$

служитъ основаніемъ для приближеннаго равенства

$$k \doteq \frac{W^0}{n-m} \tag{46};$$

она показываетъ, что приближенное равенство (46) свободно отъ постоянной погрѣшности, причемъ W^0 по прежнему означаетъ сумму

$$p'(A'_1a^0_1 + A'_2a^0_2 + .. + A'_m a^0_m - b')^2 + p''(A''_1a^0_1 + .. + A''_m a^0_m - b'')^2$$
$$+ \ldots + p^{(n)}(A^{(n)}_1 a^0_1 + \ldots + A^{(n)}_m a^0_m - b^{(n)})^2.$$

Выраженіе W^0 содержитъ кромѣ данныхъ элементовъ только количества

$$a^0_1, a^0_2, \ldots, a^0_m,$$

которыя могутъ быть найдены изъ уравненій (41).

Слѣдовательно величину W^0 можно вычислить въ каждомъ частномъ случаѣ и потому, пользуясь равенствомъ

$$k \doteq \frac{W^0}{n-m},$$

мы имѣемъ возможность найти приближенную величину k; и затѣмъ по формулѣ (44) можемъ найти приближенныя значенія математическихъ ожиданій квадратовъ погрѣшностей равенствъ

$$a_1 \doteq a^0_1, \ a_2 \doteq a^0_2, \ldots, a_m \doteq a^0_m,$$

доставленныхъ способомъ наименьшихъ квадратовъ.

Наконецъ, если въ томъ встрѣчается надобность, можемъ разсматривать и вѣроятности различныхъ предположеній о вели-

чинѣ погрѣшности любого изъ равенствъ

$$a_1 \mp a_1^0, \ a_2 \mp a_2^0, \ldots, \ a_m \mp a_m^0$$

на основаніи соображеній, установленныхъ нами выше, когда рѣчь шла о случаѣ одного неизвѣстнаго.

§ 38. Положимъ теперь, что сверхъ данныхъ и условій, допущенныхъ въ § 36, намъ извѣстно нѣсколько зависимостей между

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_m.$$

И подобно тому какъ раньше мы предполагали линейными относительно

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_m$$

тѣ выраженія, приближенныя величины которыхъ доставлены наблюденіями, будемъ предполагать линейными относительно

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_m$$

и тѣ выраженія, точныя величины которыхъ намъ извѣстны помимо наблюденій.

Такія предположенія обыкновенно оправдываютъ тѣмъ соображеніемъ, что способъ наименьшихъ квадратовъ употребляется для разысканія малыхъ поправокъ въ найденныхъ, такъ или иначе, приближенныхъ величинахъ неизвѣстныхъ.

Въ виду предполагаемой малости чиселъ

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_m$$

пренебрегаютъ ихъ степенями выше первой, равно какъ и произведеніями ихъ, и такимъ образомъ всѣ выраженія, содержащія эти числа, сводятъ къ линейнымъ.

Не настаивая на законности приведеннаго соображенія, замѣтимъ, что предположеніе о линейномъ видѣ всѣхъ выраженій, величины которыхъ доставляются наблюденіями или извѣстны помимо наблюденій, принадлежитъ къ числу основныхъ, и потому

нарушеніе его лишило бы насъ возможности обосновать способъ наименьшихъ квадратовъ на вышеуказанныхъ началахъ.

Пусть кромѣ приближенныхъ равенствъ

$$A_1' \, a_1 + A_2' \, a_2 + \ldots + A_m' \, a_m \doteqdot b'$$
$$A_1'' \, a_1 + A_2'' \, a_2 + \ldots + A_m'' \, a_m \doteqdot b''$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1^{(n)} a_1 + A_2^{(n)} a_2 + \ldots + A_m^{(n)} a_m \doteqdot b^{(n)}$$

мы имѣемъ ν равенствъ

$$\left.\begin{array}{l} D_1' \, a_1 + D_2' \, a_2 + \ldots + D_m' a_m = \partial' \\ D_1'' \, a_1 + D_2'' \, a_2 + \ldots + D_m'' a_m = \partial'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_1^{(\nu)} a_1 + D_2^{(\nu)} a_2 + \ldots + D_m^{(\nu)} a_m = \partial^{(\nu)} \end{array}\right\} \quad (47),$$

гдѣ D и ∂, съ разными знаками, числа данныя.

Затѣмъ положимъ, что на основаніи равенствъ (47) количества

$$a_1, \; a_2, \ldots, \; a_\nu$$

можно выразить черезъ

$$a_{\nu+1}, \; a_{\nu+2}, \ldots, \; a_m.$$

Тогда, пользуясь выраженіемъ однихъ количествъ черезъ другія и исключая на этомъ основаніи

$$a_1, \; a_2, \ldots, \; a_\nu,$$

мы можемъ уменьшить число неизвѣстныхъ.

Такимъ образомъ каждая изъ суммъ

$$A_1^{(i)} a_1 + A_2^{(i)} a_2 + \ldots + A_m^{(i)} a_m$$

преобразуется въ равную ей сумму вида

$$B_{\nu+1}^{(i)} a_{\nu+1} + B_{\nu+2}^{(i)} a_{\nu+2} + \ldots + B_m^{(i)} a_m + B^{(i)},$$

гдѣ коэффиціенты

$$B_{\nu+1}^{(i)},\ B_{\nu+2}^{(i)},\ldots,\ B_m^{(i)},\ B^{(i)}$$

вполнѣ опредѣляются нашими данными.

Вмѣстѣ съ тѣмъ разысканіе приближенныхъ значеній m неизвѣстныхъ

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m$$

будетъ сведено къ разысканію приближенныхъ значеній $m-\nu$ количествъ изъ n приближенныхъ уравненій

$$B'_{\nu+1}a_{\nu+1}+\ldots+B'_m a_m \mp b'-B'$$

$$B''_{\nu+1}a_{\nu+1}+\ldots+B''_m a_m \mp b''-B''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B^{(n)}_{\nu+1}a_{\nu+1}+\ldots+B^{(n)}_m a_m \mp b^{(n)}-B^{(n)}.$$

И мы можемъ обратиться къ разсужденіямъ предыдущихъ параграфовъ, если только уравненіями (47) исчерпываются всѣ извѣстныя намъ соотношенія между неизвѣстными

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m;$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ между числами

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2},\ldots,\ a_m$$

не будетъ никакихъ извѣстныхъ намъ соотношеній.

Послѣ такого уменьшенія числа неизвѣстныхъ мы найдемъ по изложеннымъ выше способамъ для неизвѣстныхъ

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2},\ldots,\ a_m$$

приближенныя величины

$$a^0_{\nu+1},\ a^0_{\nu+2},\ldots,\ a^0_m,$$

которымъ будетъ соотвѣтствовать наименьшая величина суммы

$$\Sigma p\,(B_{\nu+1}a^0_{\nu+1}+B_{\nu+2}a^0_{\nu+2}+\ldots+B_m a^0_m+B-b)^2,$$

равной

$$p'(B'_{\nu+1}a^0_{\nu+1} + B'_{\nu+2}a^0_{\nu+2} + \ldots + B'_m a^0_m + B' - b')^2 + \ldots$$
$$+ p^{(n)}(B^{(n)}_{\nu+1}a^0_{\nu+1} + B^{(n)}_{\nu+2}a^0_{\nu+2} + \ldots + B^{(n)}_m a^0_m + B^{(n)} - b^{(n)})^2.$$

Для остальныхъ же неизвѣстныхъ

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_\nu$$

мы найдемъ ихъ приближенныя величины

$$a^0_1,\ a^0_2, \ldots, a^0_\nu,$$

подставляя въ выраженія этихъ неизвѣстныхъ черезъ

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2}, \ldots, a_m$$

вмѣсто послѣднихъ чиселъ ихъ приближенныя величины

$$a^0_{\nu+1},\ a^0_{\nu+2}, \ldots, a^0_m.$$

Найденная такимъ образомъ система приближенныхъ значеній неизвѣстныхъ

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_m$$

удовлетворитъ всѣмъ уравненіямъ

$$\left.\begin{array}{l} D'_1 a^0_1 + D'_2 a^0_2 + \ldots + D'_m a^0_m = \partial' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^{(\nu)}_1 a^0_1 + D^{(\nu)}_2 a^0_2 + \ldots + D^{(\nu)}_m a^0_m = \partial^{(\nu)} \end{array}\right\} \quad (48).$$

Но для всякой системы чиселъ

$$a^0_1,\ a^0_2, \ldots, a^0_m,$$

которая удовлетворяетъ уравненіямъ (48), должно быть

$$A^{(i)}_1 a^0_1 + A^{(i)}_2 a^0_2 + \ldots + A^{(i)}_m a^0_m = B^{(i)}_{\nu+1} a^0_{\nu+1} + \ldots + B^{(i)}_m a^0_m + B^{(i)}$$

и потому сумма

$$\Sigma p(B_{\nu+1}a^0_{\nu+1} + \ldots + B_m a^0_m + B - b)^2$$

одинакова съ суммою

$$\Sigma p\,(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b)^2.$$

Отсюда нетрудно заключить, что найденная нами система чиселъ

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots,\ a_m^0,$$

представляющихъ приближенныя величины

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m,$$

отличается отъ всякой другой системы чиселъ

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots,\ a_m^0,$$

которая удовлетворяетъ уравненіямъ (48), наименьшею величиною суммы

$$\Sigma p\,(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b)^2.$$

Для лучшаго выясненія изложенныхъ нами пріемовъ разсмотримъ слѣдующій вопросъ практической геометріи.

Въ прямолинейномъ трехугольникѣ EFG нѣсколько разъ измѣрены всѣ его углы и получено для угла E, въ градусахъ, r приближенныхъ значеній

$$E',\ E'', \ldots,\ E^{(r)}$$

для угла F, въ градусахъ, s приближенныхъ значеній

$$F',\ F'', \ldots,\ F^{(s)}$$

и для угла G, въ градусахъ, t приближенныхъ значеній

$$G',\ G'', \ldots,\ G^{(t)}.$$

Всѣ наблюденія мы предполагаемъ независимыми и свободными отъ постоянныхъ ошибокъ.

Придавая сверхъ того одинаковый вѣсъ всѣмъ наблюденіямъ одного и того же угла, мы получимъ согласно изложенному спо-

собу для

$$E, F, G$$

слѣдующія приближенныя величины

$$\frac{E'+E''+\ldots+E^{(r)}}{r}, \quad \frac{F'+F''+\ldots+F^{(s)}}{s}, \quad \frac{G'+G''+\ldots+G^{(t)}}{t},$$

если только оставимъ въ сторонѣ соотношеніе

$$E+F+G=180.$$

Если же желаемъ принять во вниманіе это соотношеніе, то найденныя нами числа

$$\frac{E'+E''+\ldots+E^{(r)}}{r}, \quad \frac{F'+F''+\ldots+F^{(s)}}{s}, \quad \frac{G'+G''+\ldots+G^{(t)}}{t},$$

которыя условимся обозначать для краткости символами

$$\overline{E}, \overline{F}, \overline{G},$$

должно, въ силу изложенныхъ нами правилъ, замѣнить другими.

Эти другія приближенныя значенія чиселъ

$$E, F, G$$

обозначимъ символами

$$E^0, F^0, G^0;$$

разности же

$$E^0-\overline{E}, F^0-\overline{F}, G^0-\overline{G}$$

назовемъ поправками первыхъ приближенныхъ значеній и обозначимъ символами

$$\delta(E), \delta(F), \delta(G).$$

Числа

$$E^0, F^0, G^0$$

вмѣстѣ съ поправками

$$\delta(E), \delta(F), \delta(G)$$

получатъ опредѣленный смыслъ только послѣ того, какъ мы установимъ опредѣленныя отношенія между вѣсами наблюденій,



относящихся къ различнымъ угламъ

$$E,\ F,\ G.$$

Устанавливая различнымъ образомъ эти отношенія, мы, естественно, можемъ получить совершенно различные результаты.

Здѣсь мы приведемъ двѣ системы поправокъ

$$\delta(E),\ \ \delta(F),\ \ \delta(G).$$

Для полученія первой системы припишемъ всѣмъ наблюденіямъ одинаковый вѣсъ.

При такомъ условіи искомая нами система чиселъ

$$E^0,\ F^0,\ G^0$$

должна отличаться отъ всѣхъ другихъ системъ чиселъ

$$E^0,\ F^0,\ G^0,$$

удовлетворяющихъ уравненію

$$E^0+F^0+G^0=180,$$

наименьшею величиною суммы

$$\begin{aligned}&(E^0-E')^2+(E^0-E'')^2+\ldots+(E^0-E^{(r)})^2\\ &+(F^0-F')^2+(F^0-F'')^2+\ldots+(F^0-F^{(s)})^2\\ &+(G^0-G')^2+(G^0-G'')^2+\ldots+(G^0-G^{(t)})^2.\end{aligned}$$

Это требованіе выражается системой уравненій

$$E^0+F^0+G^0=180$$

$$rE^0-E'-E''..-E^{(r)}=sF^0-F'-F''..-F^{(s)}=tG^0-G'-G''..-G^{(t)},$$

откуда безъ большого труда выводимъ

$$\frac{E^0-\overline{E}}{\frac{1}{r}}=\frac{F^0-\overline{F}}{\frac{1}{s}}=\frac{G^0-\overline{G}}{\frac{1}{t}}=\frac{180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}},$$

или, что все равно,

$$\frac{\delta(E)}{\frac{1}{r}}=\frac{\delta(F)}{\frac{1}{s}}=\frac{\delta(G)}{\frac{1}{t}}=\frac{180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}.$$

Итакъ, если всѣмъ наблюденіямъ угловъ

$$E,\ F,\ G$$

мы приписываемъ одинъ и тотъ же вѣсъ, то поправки

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G)$$

первыхъ приближенныхъ величинъ

$$\overline{E}=\frac{E'+E''+\ldots+E^{(r)}}{r},\quad \overline{F}=\frac{F'+\ldots+F^{(s)}}{s},\quad \overline{G}=\frac{G'+G''+\ldots+G^{(t)}}{t}$$

этихъ угловъ представляютъ три части разности

$$180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})$$

обратно пропорціональныя числамъ

$$r,\ s,\ t.$$

Въ частности при

$$r=s=t$$

имѣемъ

$$\delta(E)=\delta(F)=\delta(G)=\frac{180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})}{3}.$$

Прежде чѣмъ заняться другой системой поправокъ, примѣнимъ формулы предыдущаго параграфа къ оцѣнкѣ достоинства приближенныхъ равенствъ

$$E \doteq E^0,\ F \doteq F^0,\ G \doteq G^0.$$

Для этой цѣли исключимъ число G, замѣнивъ его разностью

$$180-(E+F);$$

такъ что наблюденія угла G будутъ доставлять намъ при-

ближенныя величины разности

$$180-(E+F).$$

Въ данномъ случаѣ выраженіе W^0 предыдущаго параграфа приводится къ суммѣ

$$(E^0-E')^2+(E^0-E'')^2+\ldots\ldots+(E^0-E^{(r)})^2$$
$$+(F^0-F')^2+(F^0-F'')^2+\ldots\ldots+(F^0-F^{(s)})^2$$
$$+(E^0+F^0-180+G')^2+\ldots\ldots+(E^0+F^0-180+G^{(t)})^2,$$

если одинаковые, по предположенію, вѣса наблюденій мы приравняемъ единицѣ.

Соотвѣтственно этому система (41) приведется къ двумъ уравненіямъ

$$(r+t)\,E^0+tF^0=r\overline{E}+t\left(180-\overline{G}\right),$$
$$tE^0+(s+t)\,F^0=s\overline{F}+t\left(180-\overline{G}\right)$$

и количества

$$\Delta,\ \Delta_{1,1}\ \text{и}\ \Delta_{2,2}$$

опредѣлятся равенствами

$$\Delta=\begin{vmatrix} r+t, & t \\ t, & s+t \end{vmatrix}=rs+rt+st,\quad \Delta_{1,1}=s+t,\quad \Delta_{2,2}=r+t.$$

Отсюда слѣдуетъ, что вѣсъ равенства

$$E\doteq E^0$$

выражается дробью

$$\frac{rs+rt+st}{s+t}$$

а вѣсъ равенства

$$F\doteq F^0$$

выражается дробью

$$\frac{rs+rt+st}{r+t};$$

и по аналогіи не трудно заключить, что вѣсъ равенства

$$G \doteqdot G^0$$

долженъ выражаться дробью

$$\frac{rs+rt+st}{r+s}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$r=s=t$$

вѣса всѣхъ равенствъ

$$E \doteqdot E^0,\ F \doteqdot F^0,\ G \doteqdot G^0$$

оказываются равными

$$\frac{3r}{2},$$

т. е. половинѣ числа всѣхъ наблюденій.

Наконецъ число k, выражающее математическое ожиданіе квадрата погрѣшности каждаго изъ начальныхъ равенствъ

$$E \doteqdot E', \ldots,\ E \doteqdot E^{(r)},\ F \doteqdot F', \ldots,\ G \doteqdot G', \ldots,\ G \doteqdot G^{(t)},$$

вычисляется, съ неизвѣстною погрѣшностью, изъ равенства

$$(r+s+t-2)k \doteqdot \left\{ \begin{array}{l} (E^0-E')^2+(E^0-E'')^2+\ldots+(E^0-E^{(r)})^2 \\ +(F^0-F')^2+(F^0-F'')^2+\ldots+(F^0-F^{(s)})^2 \\ +(G^0-G')^2+(G^0-G'')^2+\ldots+(G^0-G^{(t)})^2. \end{array} \right.$$

Другая система поправокъ

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G),$$

которую мы сейчасъ укажемъ, относится къ тому случаю, когда возникаетъ сомнѣніе, не слѣдуетъ ли наблюденіямъ различныхъ угловъ приписывать различные вѣса.

Тогда для оцѣнки достоинства этихъ наблюденій можно воспользоваться формулой (27).

Согласно ей число

$$k_1 = \frac{(\bar{E}-E')^2+(\bar{E}-E'')^2+\ldots+(\bar{E}-E^{(r)})^2}{r-1}$$

будетъ приближенною величиною математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ наблюденій угла E, число

$$k_2 = \frac{(\bar{F}-F')^2+(\bar{F}-F'')^2+\ldots+(\bar{F}-F^{(s)})^2}{s-1}$$

будетъ приближенною величиною математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ наблюденій угла F, и наконецъ число

$$k_3 = \frac{(\bar{G}-G')^2+(\bar{G}-G'')^2+\ldots+(\bar{G}-G^{(t)})^2}{t-1}$$

будетъ приближенною величиною математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ наблюденій угла G.

Если числа

$$k_1,\ k_2,\ k_3$$

мало отличаются другъ отъ друга, то ихъ разсмотрѣніе можетъ служить нѣкоторымъ подтвержденіемъ прежняго предположенія, согласно которому всѣмъ наблюденіямъ мы приписывали одинаковый вѣсъ.

Если же числа

$$k_1,\ k_2,\ k_3$$

значительно разнятся другъ отъ друга, то вмѣсто предположенія равенства вѣсовъ всѣхъ наблюденій можно признать болѣе правильнымъ предположеніе, что числа k_1, k_2, k_3 служатъ вѣрною мѣрою вышеупомянутыхъ математическихъ ожиданій.

При такомъ предположеніи вѣса наблюденій угловъ

$$E,\ F,\ G$$

можно соотвѣтственно приравнять дробямъ

$$\frac{1}{k_1},\ \frac{1}{k_2},\ \frac{1}{k_3}.$$

Тогда искомая система чиселъ

$$E^0,\ F^0,\ G^0$$

будетъ отличаться отъ всякой другой системы чиселъ

$$E^0,\ F^0,\ G^0,$$

которая удовлетворяетъ уравненію

$$E^0 + F^0 + G^0 = 180,$$

наименьшимъ значеніемъ суммы

$$\frac{1}{k_1}(E^0 - E')^2 + \ldots + \frac{1}{k_1}(E^0 - E^{(r)})^2 + \frac{1}{k_2}(F^0 - F')^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{k_2}(F^0 - F^{(r)})^2 + \frac{1}{k_3}(G^0 - G')^2 + \ldots + \frac{1}{k_3}(G^0 - G^{(t)})^2.$$

Это требованіе выражается уравненіями

$$\frac{rE^0 - E' - E'' - \ldots - E^{(r)}}{k_1} = \frac{sF^0 - F' - F'' - \ldots - F^{(s)}}{k_2} = \frac{tG^0 - G' - G'' - \ldots - G^{(t)}}{k_3},$$

изъ которыхъ, въ связи съ уравненіемъ

$$E^0 + F^0 + G^0 = 180,$$

безъ труда выводимъ

$$\frac{\delta(E)}{\frac{k_1}{r}} = \frac{\delta(F)}{\frac{k_2}{s}} = \frac{\delta(G)}{\frac{k_3}{t}} = \frac{180 - (\overline{E} + \overline{F} + \overline{G})}{\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{t}}.$$

Пользуясь затѣмъ для опредѣленія вѣсовъ равенствъ

$$E \mp E^0,\quad F \mp F^0,\quad G \mp G^0$$

тѣмъ же пріемомъ, какой мы примѣнили раньше, найдемъ, что теперь эти вѣса соотвѣтственно равны

$$\frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_1(sk_3 + tk_2)},\quad \frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_2(rk_3 + tk_1)},\quad \frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_3(rk_2 + sk_1)}.$$

ГЛАВА VIII.

О страхованіи жизни.

§ 39. Расчеты стоимостей различныхъ видовъ страхованія жизни основаны на нормѣ роста капитала и на таблицахъ смертности, служащихъ для исчисленія вѣроятностей тѣхъ или иныхъ предположеній о жизни и смерти людей; ибо эти расчеты связаны съ разсмотрѣніемъ суммъ, которыя должны быть выданы или получены въ различныя эпохи времени, въ зависимости отъ жизни или смерти опредѣленныхъ лицъ.

Посредствомъ извѣстнаго множителя, выражающаго ростъ капитала во времени, подобныя суммы приводятся къ одной эпохѣ, которую мы назовемъ основнымъ моментомъ времени.

Относя всѣ капиталы къ основному моменту, превращаютъ капиталъ A въ

$$\frac{A}{(1+t)^n},$$

если полученіе или выдача капитала A послѣдуетъ черезъ n лѣтъ послѣ основного момента времени, при чемъ t означаетъ число постоянное и измѣряетъ годовой ростъ капитала.

Если же капиталъ A долженъ быть выданъ или полученъ за n лѣтъ до основного момента времени, то его превращаютъ въ

$$A(1+t)^n.$$

Такое приведеніе капиталовъ вытекаетъ изъ указаній практики; мы будемъ его придерживаться и при разсмотрѣніи математическихъ ожиданій прибыли, или убытка, предпріятій въ тѣхъ случаяхъ, когда убытки и прибыли предпріятій могутъ быть въ различные моменты времени.

На этомъ основаніи нетрудно составить понятіе о математическомъ ожиданіи прибыли предпріятія, приведенной къ данному моменту времени.

Послѣднее математическое ожиданіе, которое можно назвать стоимостью предпріятія, служитъ для рѣшенія вопроса о выгодности или невыгодности предпріятія, при разнообразіи моментовъ прибыли и убытка.

Вмѣстѣ съ тѣмъ установленное раньше условіе безобидности игръ превращается въ требованіе, чтобы для каждаго игрока математическое ожиданіе прибыли, приведенной къ одному моменту времени, было нулемъ.

Вѣроятности, которыя намъ придется разсматривать, опредѣляются посредствомъ таблицъ смертности.

Изъ таблицъ смертности получается рядъ чиселъ

$$N_a,\ N_{a+1},\ N_{a+2},\ldots,$$

гдѣ N_{a+i+1} показываетъ какое число лицъ доживаетъ до возраста $a+i+1$ лѣтъ изъ N_{a+i} лицъ, имѣющихъ возрастъ $a+i$ лѣтъ.

Сообразно этому дробь

$$\frac{N_{a+i+1}}{N_{a+i}}$$

будетъ вѣроятностью лицу возраста $a+i$ лѣтъ дожить до $a+i+1$ лѣтъ, а дробь

$$\frac{N_{a+i}-N_{a+i+1}}{N_{a+i}}$$

выразитъ вѣроятность тому же лицу, возраста $a+i$ лѣтъ, умереть въ теченіи одного года.

Далѣе нетрудно заключить, что дробь

$$\frac{N_{a+i+n}}{N_{a+i}}$$

представитъ вѣроятность лицу возраста $a+i$ лѣтъ дожить до $a+i+n$ лѣтъ, дроби же

$$\frac{N_{a+i}-N_{a+i+1}}{N_{a+i}},\ \frac{N_{a+i+1}-N_{a+i+2}}{N_{a+i}},\ \frac{N_{a+i+2}-N_{a+i+3}}{N_{a+i}},\ldots.$$

представляютъ соотвѣтственно вѣроятности лицу возраста $a+i$ лѣтъ умереть въ возрастѣ

отъ $a+i$ до $a+i+1$ лѣтъ, отъ $a+i+1$ до $a+i+2$ лѣтъ, и т. д.

По числамъ

$$N_a,\ N_{a+1},\ N_{a+2},\ldots.$$

составляется другой важный рядъ чиселъ

$$Q_a=\frac{N_a}{(1+t)^{\omega}},\ Q_{a+1}=\frac{N_{a+1}}{(1+t)^{\omega+1}},\ldots,\ Q_{a+i}=\frac{N_{a+i}}{(1+t)^{\omega+i}},\ldots.$$

гдѣ ω означаетъ нѣкоторое постоянное, напримѣръ a.

Рядъ

$$Q_a,\ Q_{a+1},\ Q_{a+2},\ldots.$$

состоитъ изъ конечнаго числа членовъ; складывая ихъ съ того или другого члена до послѣдняго, образуемъ третій рядъ чиселъ

$$\begin{aligned} S_a &= Q_{a+1}+Q_{a+2}+Q_{a+3}+\ldots. \\ S_{a+1} &= \qquad\quad\ Q_{a+2}+Q_{a+3}+\ldots. \\ S_{a+2} &= \qquad\qquad\qquad\ Q_{a+3}+\ldots. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Приведенными числами можно воспользоваться для рѣшенія слѣдующихъ задачъ, относящихся къ страхованію одного лица.

Задача 1ая. Опредѣлить стоимость единицы капитала, уплачиваемой лицу возраста с лѣтъ по достиженіи имъ возраста д лѣтъ, причемъ эта стоимость должна быть отнесена

къ тому моменту времени, когда вышеупомянутое лицо имѣетъ возрастъ с лѣтъ.

Искомая стоимость, какъ нетрудно догадаться, выражается произведеніемъ

$$\frac{N_д}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{д-c}},$$

которое равно отношенію

$$\frac{Q_д}{Q_c}.$$

Если найдется N_c лицъ, возраста c лѣтъ, и каждое изъ нихъ внесетъ въ общую кассу капиталъ

$$\frac{N_д}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{д-c}};$$

то составится сумма

$$\frac{N_д}{(1+t)^{д-c}},$$

которая черезъ $д - c$ лѣтъ превратится въ

$$N_д,$$

если сохранится принятый нами размѣръ роста капитала.

Съ другой стороны, если эти N_c лицъ будутъ вымирать согласно принятой нами таблицѣ смертности, то къ моменту расплаты изъ нихъ останется въ живыхъ $N_д$ лицъ, которыя и могутъ получить по одной единицѣ капитала изъ общей кассы, содержащей $N_д$ единицъ капитала.

Это разсужденіе подтверждаетъ вѣрность найденнаго нами числа

$$\frac{N_д}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{д-c}} = \frac{Q_д}{Q_c}.$$

Задача 2^ая. Лицо возраста с лѣтъ желаетъ получать ежегодную постоянную пенсію А, начиная съ момента достиженія имъ возраста с+і лѣтъ до смерти.

Опредѣлить какою суммою X обезпечивается эта пенсія въ моментъ, когда вышеуказанное лицо имѣетъ с лѣтъ.

Предположимъ, что ежегодная пенсія A не распредѣляется

по частямъ года, а выдается вся цѣликомъ, и сообразно этому отнесемъ ежегодную пенсію A къ тѣмъ моментамъ времени, когда разсматриваемое лицо будетъ послѣдовательно достигать возрастовъ

$$c+i \text{ лѣтъ}, \; c+i+1 \text{ лѣтъ}, \; c+i+2 \text{ лѣтъ}, \ldots.$$

При такомъ предположеніи получимъ, на основаніи рѣшенія предыдущей задачи, рядъ послѣдовательныхъ стоимостей

$$\frac{Q_{c+i}}{Q_c}A, \; \frac{Q_{c+i+1}}{Q_c}A, \; \frac{Q_{c+i+2}}{Q_c}A, \ldots.$$

сумма которыхъ

$$\frac{Q_{c+i}+Q_{c+i+1}+Q_{c+i+2}+\ldots}{Q_c}A$$

выразитъ искомую величину X; слѣдовательно

$$\frac{X}{A}=\frac{S_{c+i-1}}{Q_c}.$$

Найденная нами величина X можетъ быть разсматриваема какъ нормальная сумма, которую должно потребовать страховое учрежденіе отъ лица возраста c за предоставленіе ему права на ежегодную пенсію A, если выдача пенсіи начинается съ момента достиженія вышеупомянутымъ лицомъ возраста $c+i$ и продолжается до смерти этого лица.

Задача 3[я]. *Найти, какую сумму Y должно потребовать страховое учрежденіе за предоставленіе, наслѣдникамъ лица возраста c, права получить сумму A въ моментъ смерти этого лица.*

Другими словами, требуется опредѣлить стоимость этого права, когда застрахованное лицо находится въ живыхъ и имѣетъ возрастъ c лѣтъ.

Для упрощенія вопроса пріурочимъ предстоящую смерть застрахованнаго лица къ тѣмъ моментамъ, когда оно достигаетъ возрастовъ

$$c \text{ лѣтъ}, \; c+1 \text{ лѣтъ}, \; c+2 \text{ лѣтъ}, \text{ и т. д.},$$



считая, что въ случаѣ, если смерть лица послѣдуетъ между возрастомъ $c+i$ и $c+i+1$ лѣтъ, его наслѣдники получатъ сумму A уже въ тотъ моментъ, когда возрастъ этого лица будетъ равенъ $c+i$ годамъ.

Такое предположеніе, значительно упрощающее расчетъ, преувеличиваетъ, до нѣкоторой степени, искомую стоимость.

Чтобы получить затѣмъ величину меньшую, чѣмъ искомая стоимость, достаточно подвинуть на годъ всѣ моменты послѣдовательныхъ выдачъ, что введетъ только простой дѣлитель $1+t$.

Останавливаясь на вышеуказанномъ предположеніи, станемъ разсматривать пожизненное страхованіе лица какъ совокупность годовыхъ страхованій:

на случай смерти въ возрастѣ отъ c до $c+1$ лѣтъ,

на случай смерти въ возрастѣ отъ $c+1$ до $c+2$ лѣтъ,

и т. д.

Стоимости этихъ годовыхъ страхованій, отнесенныя къ моменту времени, когда застрахованное лицо имѣетъ возрастъ c, выразятся произведеніями

$$\frac{N_c-N_{c+1}}{N_c}A,\ \frac{N_{c+1}-N_{c+2}}{N_c}\cdot\frac{A}{1+t},\ \frac{N_{c+2}-N_{c+3}}{N_c}\cdot\frac{A}{(1+t)^2},\ldots$$

Отсюда заключаемъ, что искомая величина Y, нѣсколько преувеличенная, можетъ быть представлена въ видѣ суммы

$$\frac{N_c-N_{c+1}}{N_c}A+\frac{N_{c+1}-N_{c+2}}{N_c}\cdot\frac{A}{1+t}+\frac{N_{c+2}-N_{c+3}}{N_c}\cdot\frac{A}{(1+t)^2}+\ldots$$

которая легко приводится къ

$$A-t\frac{Q_{c+1}+Q_{c+2}+Q_{c+3}+\ldots}{Q_c}A=A-t\frac{S_c}{Q_c}A.$$

Этотъ результатъ, на основаніи рѣшенія предыдущей задачи, можетъ быть истолкованъ въ томъ смыслѣ, что наслѣдники, получая капиталъ A только послѣ смерти застрахованнаго лица,



лишаются, во все время его жизни, процентовъ съ этого капитала.

Если раздѣлимъ найденную величину

$$A\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right)$$

на $1+t$, то получимъ величину

$$\frac{A}{1+t}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

которая, согласно выше сказанному, будетъ меньше искомой стоимости Y.

Наконецъ для достиженія большей точности можно пріурочить смерть застрахованнаго лица къ тѣмъ моментамъ, когда оно достигаетъ возрастовъ

$$c+\frac{1}{2}\text{ лѣтъ},\quad c+\frac{3}{2}\text{ лѣтъ},\quad c+\frac{5}{2}\text{ лѣтъ и т. д.};$$

тогда получится для искомой стоимости Y третье значеніе

$$\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

о которомъ уже нельзя будетъ сказать, превосходитъ ли оно Y или нѣтъ.

Замѣтимъ, что мы имѣемъ здѣсь одинъ изъ тѣхъ важныхъ для практики случаевъ, когда существованіе искомой величины, въ строгомъ математическомъ смыслѣ, не можетъ быть установлено; поэтому въ данномъ случаѣ не можетъ быть и рѣчи о точной формулѣ.

Задача 4ая. *Лицо возраста c уплачиваетъ страховому учрежденію ежегодно сумму x, начиная съ момента достиженія возраста c до своей смерти, съ тѣмъ условіемъ, чтобы наслѣдникамъ этого лица была выдана сумма A тотчасъ послѣ его смерти.*

Опредѣлить нормальную величину отношенія $\frac{x}{A}$.

Согласно рѣшенію задачи 2ой стоимость всѣхъ суммъ, кото-

рыя уплатитъ застрахованное лицо страховому учрежденію приводится для начала страхованія къ

$$\left(1+\frac{S_c}{Q_c}\right)x.$$

Съ другой стороны на основаніи рѣшенія задачи 3^ей^ можно признать, что для того же момента времени стоимость суммы A, которую страховое учрежденіе должно будетъ уплатить наслѣдникамъ лица, приводится къ

$$\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right).$$

Поэтому, на основаніи условія безобидности игръ, имѣемъ

$$\left(1+\frac{S_c}{Q_c}\right)x=\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

откуда выводимъ

$$\frac{x}{A}=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1-t\frac{S_c}{Q_c}}{1+\frac{S_c}{Q_c}}=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{Q_c-tS_c}{Q_c+S_c}.$$

§ 40. Переходя къ такимъ страхованіямъ, которыя обусловлены жизнью и смертью двухъ лицъ, положимъ для большей общности, что эти два лица принадлежатъ къ различнымъ категоріямъ людей, и что потому къ нимъ слѣдуетъ примѣнять различныя таблицы смертности.

Сохранимъ для одного лица прежній рядъ чиселъ

$$N_a,\ N_{a+1},\ N_{a+2},\ N_{a+3},\ldots$$

въ выше разъясненномъ смыслѣ; а для другого лица будемъ употреблять, въ томъ же смыслѣ, новый рядъ чиселъ

$$N'_a,\ N'_{a+1},\ N'_{a+2},\ N'_{a+3},\ldots$$

Тогда, если первое лицо имѣетъ возрастъ c лѣтъ, а второе возрастъ ∂ лѣтъ, то вѣроятность прожить имъ обоимъ i лѣтъ

выразится произведеніемъ

$$\frac{N_{c+i}}{N_c} \cdot \frac{N'_{д+i}}{N'_д}.$$

При тѣхъ же условіяхъ вѣроятность, что первое лицо умретъ въ теченіи i лѣтъ, а второе останется въ живыхъ, представится произведеніемъ

$$\frac{N_c - N_{c+i}}{N_c} \cdot \frac{N'_{д+i}}{N'_д};$$

и вѣроятность, что второе лицо умретъ въ теченіи i лѣтъ, а первое останется въ живыхъ, представится произведеніемъ

$$\frac{N_{c+i}}{N_c} \cdot \frac{N'_д - N'_{д+i}}{N'_д}.$$

Наконецъ произведеніе

$$\frac{N_c - N_{c+1}}{N_c} \cdot \frac{N'_д - N'_{д+i}}{N'_д}$$

выразитъ вѣроятность, что оба лица умрутъ въ теченіи i лѣтъ.

Для рѣшенія нижеслѣдующихъ задачъ полезно ввести три системы чиселъ:

$$X_c = \frac{1}{N_c}\left\{\frac{N_{c+1}}{1+t} + \frac{N_{c+2}}{(1+t)^2} + \frac{N_{c+3}}{(1+t)^3} + \ldots\right\},$$

$$X'_д = \frac{1}{N'_д}\left\{\frac{N'_{д+1}}{1+t} + \frac{N'_{д+2}}{(1+t)^2} + \frac{N'_{д+3}}{(1+t)^3} + \ldots\right\},$$

$$X_{c,д} = \frac{N_{c+1}\,N'_{д+1}}{(1+t)\,N_c\,N'_д} + \frac{N_{c+2}\,N'_{д+2}}{(1+t)^2\,N_c\,N'_д} + \ldots,$$

гдѣ подъ буквами c и $д$ мы подразумѣваемъ любое изъ чиселъ

$$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3, \ldots$$

Число

$$1 + X_c$$

представляетъ, на основаніи рѣшенія задачи 2ой, стоимость единицы капитала, уплачиваемой ежегодно первому лицу, или первымъ лицомъ, съ момента достиженія имъ возраста c до смерти,

при чемъ эта стоимость отнесена къ моменту первой уплаты, когда вышеупомянутое лицо имѣетъ возрастъ c лѣтъ.

Подобный же смыслъ имѣетъ для второго лица число

$$1 + X'_{d}.$$

Что же касается числа

$$1 + X_{c,d},$$

то оно выражаетъ, какъ нетрудно убѣдиться, стоимость ежегодныхъ уплатъ единицы капитала, производимыхъ при условіи существованія въ живыхъ обоихъ разсматриваемыхъ нами лицъ, при чемъ эта стоимость, подобно предыдущимъ, относится къ моменту первой уплаты, который совпадаетъ съ моментами достиженія вышеупомянутыми лицами возрастовъ c лѣтъ и d лѣтъ.

Задача 5[ая]. Лицо возраста c лѣтъ желаетъ, чтобы тотчасъ послѣ его смерти страховое учрежденіе выдало другому лицу, возраста d лѣтъ, капиталъ A, если смерть перваго лица послѣдуетъ въ тотъ промежутокъ времени, когда его возрастъ будетъ заключаться между $c+i$ и $c+i+1$ годами.

Опредѣлить стоимость этого капитала, приведенную къ моменту, когда первое лицо имѣетъ возрастъ c лѣтъ, а второе d лѣтъ.

Если бы уплата капитала A не была обусловлена жизнью второго лица, то искомую стоимость можно было бы представить произведеніемъ

$$\frac{N_{c+i} - N_{c+i+1}}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}},$$

на основаніи сказаннаго нами при рѣшеніи задачи 3[ей].

Теперь же мы должны прибавить еще одинъ множитель, выражающій вѣроятность, что въ моментъ смерти перваго лица второе окажется въ живыхъ.

Этотъ множитель лежитъ между

$$\frac{N'_{d+i}}{N'_d} \text{ и } \frac{N'_{d+i+1}}{N'_d};$$

ибо въ разсматриваемый моментъ смерти перваго лица возрастъ второго лица заключается между $\partial + i$ и $\partial + i + 1$ годами.

Допуская же, что въ моментъ смерти перваго лица возрастъ второго равенъ $\partial + i + \frac{1}{2}$, мы за вышеупомянутый множитель можемъ принять

$$\frac{N'_{\partial+i} + N'_{\partial+i+1}}{2N'_\partial}.$$

Итакъ за величину искомой стоимости можно считать произведеніе

$$\frac{N_{c+i} - N_{c+i+1}}{N_c} \cdot \frac{N'_{\partial+i} + N'_{\partial+i+1}}{2N'_\partial} \cdot \frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}}.$$

Этотъ результатъ послужитъ основаніемъ для дальнѣйшихъ нашихъ выводовъ.

Задача 6ая. Лицо возраста c вноситъ въ страховое учрежденіе капиталъ Y съ тѣмъ условіемъ, чтобы тотчасъ по смерти этого лица былъ выданъ капиталъ A другому лицу возраста д.

Найти нормальную величину отношенія

$$\frac{Y}{A}.$$

Страхованіе, о которомъ идетъ рѣчь, можно разсматривать какъ совокупность годовыхъ страхованій, стоимость которыхъ мы только что опредѣлили.

На этомъ основаніи нетрудно установить равенства

$$\frac{Y}{A} = \sum \frac{N_{c+i} - N_{c+i+1}}{N_c} \cdot \frac{N'_{\partial+i} + N'_{\partial+i+1}}{2N'_\partial} \cdot \frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}},$$

гдѣ

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots .$$

Затѣмъ посредствомъ простыхъ преобразованій выводимъ

$$\frac{Y}{A}\sqrt{1+t} = \frac{1}{2}(1 - tX_{c,\partial}) - \frac{N_{c+1}}{2N_c}(1 + X_{c+1,\partial}) + \frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1 + X_{c,\partial+1}).$$

Задача 7ая. Лицо возраста с и другое лицо возраста д вносятъ въ страховое учрежденіе капиталъ Z съ тѣмъ условіемъ, чтобы тотчасъ по смерти кого нибудь изъ нихъ былъ выданъ капиталъ A оставшемуся въ живыхъ.

Найти нормальную величину отношенія

$$\frac{Z}{A}.$$

На основаніи рѣшенія задачи 6ой произведеніе

$$\frac{Z}{A}\sqrt{1+t}$$

выражается суммою

$$\frac{1}{2}(1-tX_{c,\partial})-\frac{N_{c+1}}{2N_c}(1+X_{c+1,\partial})+\frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1+X_{c,\partial+1})$$

$$+\frac{1}{2}(1-tX_{c,\partial})-\frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1+X_{c,\partial+1})+\frac{N_{c+1}}{2N_c}(1+X_{c+1,\partial}),$$

которая приводится къ

$$1-tX_{c,\partial}.$$

Этотъ результатъ можно вывести изъ того соображенія, что два лица, получая капиталъ A только послѣ смерти одного изъ нихъ, лишаются процентовъ съ капитала A во все время, пока они оба живы.

Задача 8ая. Лицо возраста с и другое лицо возраста д вносятъ ежегодно въ страховое учрежденіе капиталъ x, пока оба живы, съ тѣмъ условіемъ, чтобы тотчасъ по смерти кого нибудь изъ нихъ оставшемуся въ живыхъ былъ выданъ капиталъ A. Найти нормальную величину отношенія

$$\frac{x}{A}.$$

На основаніи рѣшенія предыдущей задачи получаемъ

$$\frac{x}{A}=\frac{1-tX_{c,\partial}}{1+X_{c,\partial}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}},$$

если первая уплата капитала x происходитъ въ тотъ моментъ, когда вышеупомянутыя лица имѣютъ возрасты c лѣтъ и ∂ лѣтъ.

Задача 9^ая^. Лицо возраста с вноситъ въ страховое учрежденіе капиталъ Z съ тѣмъ, чтобы другому лицу возраста д была обезпечена ежегодная пожизненная пенсія A съ момента смерти перваго лица.

Опредѣлить нормальную величину отношенія $\frac{Z}{A}$.

Для упрощенія расчета пріурочимъ всѣ выдачи пенсіи къ тѣмъ моментамъ, когда второе лицо достигаетъ возраста

$$д+1 \text{ лѣтъ}, \quad д+2 \text{ лѣтъ}, \quad д+3 \text{ лѣтъ и т. д.}$$

Далѣе условія задачи истолкуемъ такимъ образомъ, что при достиженіи возрастовъ

$$д+1 \text{ лѣтъ}, \quad д+2 \text{ лѣтъ}, \quad д+3 \text{ лѣтъ и т. д.}$$

второе лицо во всякомъ случаѣ получаетъ пенсію A, которую однако оно тотчасъ возвращаетъ страховому учрежденію, если и первое лицо оказывается живымъ.

При такомъ толкованіи вопроса легко получается формула

$$\frac{Z}{A} = X'_д - X_{с,д}.$$

Желающимъ ознакомиться подробнѣе съ различными вопросами страхованія жизни и пріемами ихъ рѣшенія укажемъ капитальное сочиненіе Б. Ф. Малешевскаго «Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ»; оно содержитъ также изложеніе пріемовъ составленія таблицъ смертности.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

